

底部均匀加热的倾斜腔体中的对流特性

吴昊¹, 宁利中¹, 宁碧波², 王新宏¹, 田伟利³, 宁景昊¹

(1. 西安理工大学 西北旱区生态水利工程国家重点实验室培育基地, 陕西 西安 710048;

2. 嘉兴学院 建筑工程学院, 浙江 嘉兴 314001; 3. 上海大学 建筑系, 上海 200444)

摘要: 利用二维流体力学基本方程的数值模拟, 探讨了普朗特数 $Pr = 6.99$ 时矩形腔体在一定倾斜角度下均匀加热后的对流特性, 讨论了不同的控制参数对对流斑图及流速分布的影响。主要计算两种情况: 控制相对瑞利数, 改变腔体倾斜角度; 控制腔体倾斜角度, 改变相对瑞利数。结果表明: 给定倾斜角度且角度较小时, 随着相对瑞利数的增大, 滚动圈个数逐渐增多, 流速绝对值增大; 给定相对瑞利数, 随着倾斜角度的增大, 滚动圈个数逐渐减少, 流速绝对值减小。

关键词: Rayleigh-Bénard 对流; 底部均匀加热; 相对瑞利数; 倾斜角; 对流特性; 倾斜腔体

中图分类号: O357

文献标识码: A

文章编号: 1672-643X(2018)01-0182-05

Convection characteristics in the inclination cavity of uniform heating from below

WU Hao¹, NING Lizhong¹, NING Bibo², WANG Xinhong¹, TIAN Weili³, NING Jinghao¹

(1. State Key Laboratory Base of Eco-hydraulic Engineering in Arid Area, Xi'an University of Technology, Xi'an 710048, China;

2. College of Civil Engineering and Architecture, Jiaxing University, Jiaxing 314001, China;

3. Department of Architecture, Shanghai University, Shanghai 200444, China)

Abstract: The numerical simulation of the basic equations of two-dimensional fluid mechanics is carried out to investigate the convective characteristics of the rectangular cavity in a certain inclination angle under uniform heating at the Prandtl number $Pr = 6.99$, and the influence of different control parameters on the convection pattern and the velocity profile is also discussed. The following two conditions are mainly calculated: one is controlling relative Rayleigh number and changing the inclination angle of cavity; the other is controlling cavity tilt angle and changing relative Rayleigh number. The results showed that when the inclination angle is constant and small, the number of rolls and the absolute value of velocity increases gradually with the increase of relative Rayleigh number, and when the relative Rayleigh number is constant, the number of rolls and the absolute value of flow velocity decreases with the increase of inclination angle.

Key words: Rayleigh-Bénard convection; uniform heating form below; relative Rayleigh number; inclination angle; convection characteristics; inclination cavity

1 研究背景

近几年, 对流问题是引起世界范围内较大关注的研究课题之一, 这不仅仅是由于许许多多的自然现象都涉及到非线性的对流问题, 而且在日常生活中, 对流现象也时常出现。例如, 在冬天的水库、湖

泊或者是大海中, 当靠近底部的水流温度较高, 临近水面温度较低时, 底部和水面之间就会形成一个温度差, 并且达到一个限值, 若此时水面出现无风状态, 就会出现这样一个现象: 水面上会有水向两侧或者多方位冒出, 然后水面又归于平静, 这一对流现象较为常见且典型。通常情况下, 人们研究对流问题

收稿日期: 2017-07-17; 修回日期: 2017-09-04

基金项目: 国家自然科学基金项目(10872164); 陕西省重点学科建设专项(00X901)

作者简介: 吴昊(1992-), 女, 江苏扬州人, 在读硕士研究生, 研究方向为水力学及河流动力学。

通讯作者: 宁利中(1961-), 男, 陕西西安人, 博士, 教授, 研究方向为对流动力学、高速水力学。

大部分都是先建立 Rayleigh - Bénard 对流模型,然后再进行该研究。

Rayleigh - Bénard 对流系统就是在一个完全密闭的腔体内,保持上表面的温度持续稳定不变,使下表面的温度逐渐升高。此时下表面附近的流体在温度增加后会产生膨胀,与上表面附近的流体的密度相比,底面的流体密度较小,这时,下表面附近的流体就会上升,流体在上升过程中必然会因与周围流体相接触而消耗能量,因此,上升的流体温度逐渐变低,密度逐渐变大。如果继续给下表面增温,并使其附近流体的密度因高温而变得非常小,若流体上升到上表面,且能量还未耗尽,就会产生 RB 对流斑图^[1-4]。从 20 世纪初,在 Henri Bénard 通过实验观察到在实验装置上下壁存在温差情况下腔体内出现了有规则的对流斑图, Lord Rayleigh 对这种结果进行了理论的研究后,这一现象引起了科研人员的兴趣。随后科学工作者们对此展开了广泛和深入的研究,并且获得了很大的进展^[5-8]。在数值计算方面,人们通过流体力学基本方程组^[9]、流体力学扰动方程组或者流体力学振幅方程组,对对流斑图进行模拟,探讨其动力学特性。在人们研究对流的过程中,已经发现了诸如行波、局部行波、定常对流等等的对流现象^[10-18]。如今,国内外大多在侧向腔体加热,矩形腔体给定水平来流,对腔体进行局部或周期加热等研究方向对对流结构的影响而进行研究,但关于倾斜角度对对流结构影响这一课题的研究相对较少。

本文通过数值求解二维流体力学基本方程组,研究普朗特数 $Pr = 6.99$ 时,具有一定倾斜角度的矩形腔体在均匀加热条件下对对流特性的影响。

2 数学物理模型

2.1 流体力学基本方程组

在一倾斜放置、矩形截面的二维封闭的腔体(如图 1 所示)内进行自然对流换热的数值计算时,通常采用 Boussinesq 假设^[9],即认为温度足够小时,仅浮力项中考虑密度的变化。描述这一对流问题的流体力学方程组^[9]可表示为:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial y} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial(u^2)}{\partial x} + \frac{\partial(uw)}{\partial y} = -\frac{\partial p_{eff}}{\rho_0 \partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) - g\alpha(T - T_0) \sin\theta \quad (2)$$

$$\frac{\partial(uw)}{\partial x} + \frac{\partial(w^2)}{\partial y} = -\frac{\partial p_{eff}}{\rho_0 \partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) +$$

$$g\alpha(T - T_0) \cos\theta \quad (3)$$

$$\frac{\partial(uT)}{\partial x} + \frac{\partial(wT)}{\partial y} = \kappa \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) \quad (4)$$

式中: $p_{eff} = p + \rho_0 g y \cos\theta - \rho_0 g x \sin\theta$, u, v 分别为沿腔体长度方向的速度和垂直速度, m/s ; T 为温度场, K ; ρ 为密度, kg/m^3 ; g 为重力加速度, m/s^2 ; p 为压强, Pa ; ν 为运动黏性系数, m^2/s ; α 为热引起的体积膨胀系数, K^{-1} ; t 为时间, s ; κ 为热扩散系数, m^2/s ; θ 为矩形腔体倾斜角度, $(^\circ)$ 。下标 0 表示传导状态下相应物理量沿空腔高度的平均值,一般取腔体 1/2 高度处的值。

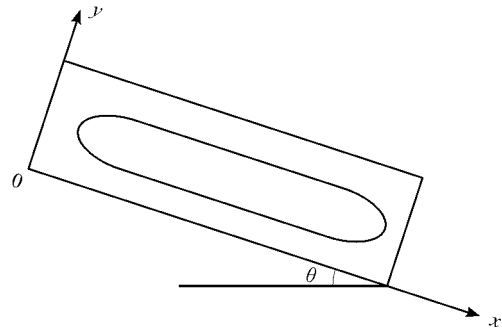


图 1 倾斜腔体的模型图

2.2 边界条件和初值

在均匀加热下,应该给出合理恰当的速度场、温度场等边界条件来求解方程组。由于模型中所有壁面都是固定的,所以速度在壁面上为 0。因此,

$$\text{当 } y = 0, d \text{ 时, } u = w = 0 \quad (5)$$

$$\text{当 } x = 0, L_x \text{ 时, } u = w = 0 \quad (6)$$

式中: d 为计算区域高度; L_x 为计算腔体的长度。

温度的边界条件为:

$$\text{温度在 } x = 0, L_x \text{ 处是绝热的, 故 } \frac{\partial T}{\partial x} = 0$$

$$\text{当 } y = 0 \text{ 时, } T = T_0 + 0.5\Delta T \quad (7)$$

$$\text{当 } y = d \text{ 时, } T = T_0 - 0.5\Delta T \quad (8)$$

式中: ΔT 为上下表面温度差; 本文针对 $t = 20^\circ C$, $Pr = 6.99$ 的流体, 此时 $T_0 = 293.15K$; 流速初始条件为 $u = w = 0$, 温度的初始条件为 $T_0 = 293.15K$; 为了讨论的方便, 取 $X = x/d, Y = y/d, \Gamma = L_x/d$ 。

这样一个系统可以由以下参数来控制, 即倾斜角度 θ , 瑞利数 $Ra = g\alpha\Delta T d^3 / \kappa\nu$, 在这里采用相对瑞利数 $r = Ra/Ra_c$ 来作为控制参数, 其中, $Ra_c = 1708$; 反映流体物理性质对对流传热过程影响的普朗特数 $Pr = \nu/\kappa, \kappa = \lambda/(\rho_0 c_p)$, λ 为热传导系数, $W/(m \cdot K)$; c_p 为定压比热容, $J/(kg \cdot K)$ 。

2.3 数值计算方法

在数值模拟中, 本文采用 Gambit 来划分网格,

建立基本模型,运用 Fluent 软件进行模拟运算求解,最后用 Tecplot 进行后处理。根据有限容积法对流体力学方程组进行了离散,对流与扩散项采用二阶精度的乘方差分格式。Simple 算法用于求解速度 - 压力耦合方程。采用均匀交错网格系统。

本文采用的是长高比 $\Gamma = 20$ 的腔体,对 $Pr = 6.99$ 的流体进行对流模拟。由于文献[19]对采用 $d/20$ 与 $d/30$ 两种不同的网格进行计算,发现计算结果基本相同。所以本文采用 $d/20$ 的网格进行计算,时间步长采用 $\Delta t = 0.02 \text{ s}$ 。

3 倾斜腔体在均匀加热条件下的对流

3.1 倾斜腔体的对流结构

3.1.1 流线图的变化过程 取相对瑞利数,倾角为 89° 条件下,分析下壁面 Nu 数随时间的变化,如图2所示。从图2中可以看出, Nu 数在 $0 \leq t \leq 2 \text{ s}$ 这一期间急剧减小,然后呈现缓慢减小的趋势,降到 $t = 16 \text{ s}$ 到达最低点,再呈现缓慢上升的趋势,一直到 $t = 80 \text{ s}$ 之后, Nu 数不再随时间变化,此时说明对流趋于稳定,所形成的流线图不再变化,这时形成的流线图可以作为 $r = 3$ 、倾角为 89° 条件下的最终结果。

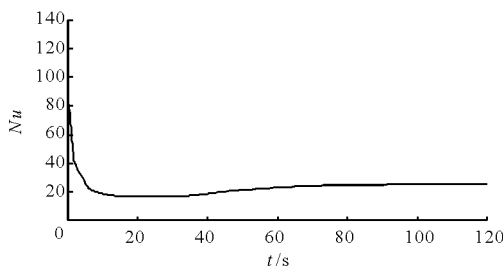


图2 $r = 3$ 且 $\theta = 89^\circ$ 时 Nu 数随时间的变化

图3为 $r = 3$ 、 $\theta = 89^\circ$ 流线图在不同时间的变化,分别为在 $t = 2 \text{ s}$ 、 $t = 16 \text{ s}$ 、 $t = 80 \text{ s}$ 、 $t = 120 \text{ s}$ 时形成的流线图,将图3与图2相对照,从中可以看出对流圈在各个特征点所发生的变化。 $2 \text{ s} \leq t \leq 16 \text{ s}$ 比 $16 \text{ s} \leq t \leq 80 \text{ s}$ 这一时间段变化速度要快。图3中 $t = 120 \text{ s}$ 时形成的流线图与 $t = 80 \text{ s}$ 时的流线图比较没有明显的变化,由此可以证明, $t = 80 \text{ s}$ 形成的流线图可以作为最终结果。

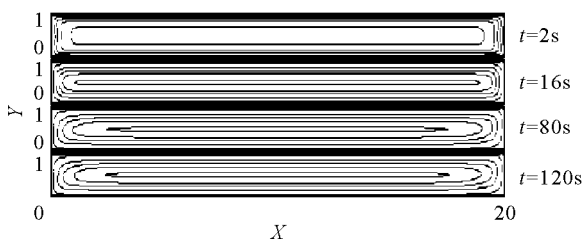
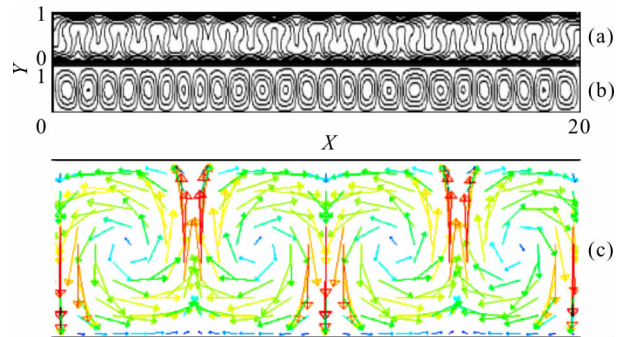


图3 $r = 3$ 且 $\theta = 89^\circ$ 时流线图随时间的变化

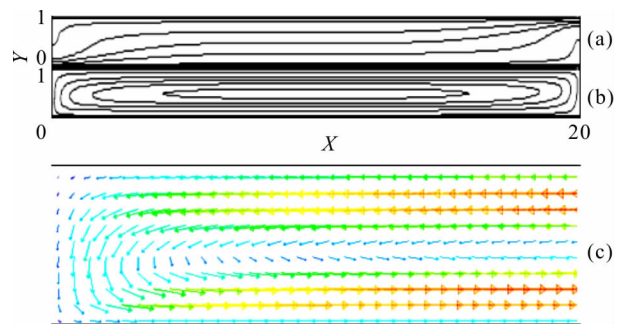
3.1.2 对流斑图结构 图4为 $r = 6$ 、 $\theta = 1^\circ$ 对流结构,类似于水平放置状态下的典型对流结构。图4(a)为温度场,类似于正弦函数的弯曲的曲线,具有周期性。图4(b)是流线,由封闭的曲线组成的流线圈,共有25个对流圈,波数是 $25\pi/20 = 3.93$ 。图4(c)是2个周期内的速度矢量图,两个对流圈对应一个周期,流体顺时针或逆时针交替流动,可以看出两个滚动之间的上升流或下降流。



注:(a)温度场;(b)流线;(c)速度矢量

图4 $r = 6$ 且 $\theta = 1^\circ$ 时的对流结构

图5为 $r = 6$ 、 $\theta = 60^\circ$ 时的对流结构,这时出现了另外一种对流结构。与图4相比,温度场变成了平滑的曲线,流线变成一个封闭完整的稳定的对流圈。图5(c)为 $0 \leq X \leq 10$ 范围内的速度矢量。可以看出,接近上壁面的流体向左运动,接近下壁面的流体向右运动,形成逆时针流动的一个大滚动,越靠近壁面速度越大,越向中心处速度越小。



注:(a)温度场;(b)流线;(c)速度矢量

图5 $r = 6$ 且 $\theta = 60^\circ$ 时的对流结构

3.1.3 流速分布 图6为 $r = 6$ 且 $\theta = 60^\circ$ 时在腔体 $1/2$ 、 $1/4$ 、 $3/4$ 高处垂直方向的流速。从图6中可以看出,在 $0 < Y < 1$ 范围内,无论处于腔体哪一高度,该处的垂直方向上的流速分布基本一致,在 $0 < X < X_0$ 时,流速先减小到最小值再回到0,在 $X_l < X < 20$ 时,流速迅速增大到最大值,再回到0,在 $X_0 < X < X_l$ 范围内,流速基本为0;在 $1/2$ 腔体高度处,垂

直方向上流速的绝对值最大。

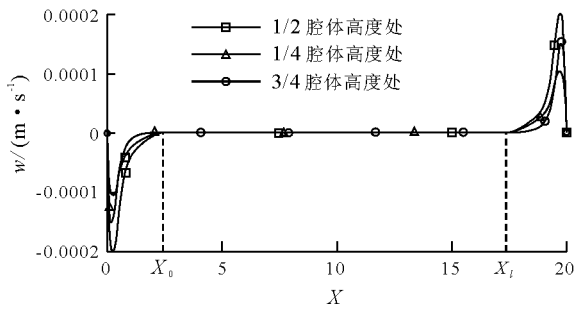


图 6 $r = 6$ 且 $\theta = 60^\circ$ 时腔体不同高处随 X 变化的垂直流速

3.2 相对瑞利数对对流结构的影响

3.2.1 相对瑞利数对 streamline 的影响 在倾斜角度比较小时 ($\theta = 4^\circ$), 流函数随着相对瑞利数的变化而变化, 如图 7 所示。从图 7 中可以看出, 该流体在倾角较小的情况下存在多种稳定状态的流线, 并且随着 r 的增加, 滚动圈的个数逐渐增加。相对瑞利数越大, 上下壁面的温差就越大, 由此可以说明, 在极小的角度下, 增大温差, 对流将由单滚动转换成多滚动。

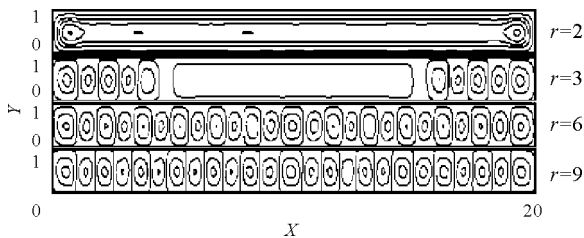


图 7 $\theta = 4^\circ$ 时不同 r 下的流线图

当倾斜角度逐渐增大至 60° 时, 流函数随着相对瑞利数变化如图 8 所示。从图 8 中可以看出, 倾斜角度增大到一定度数时, 无论相对瑞利数增加多大, 形成的都是一个完整稳定的滚动圈, 相对瑞利数对 streamline 的影响较小。

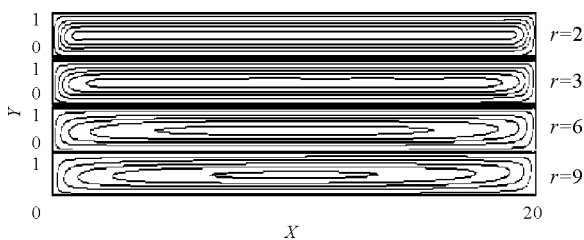
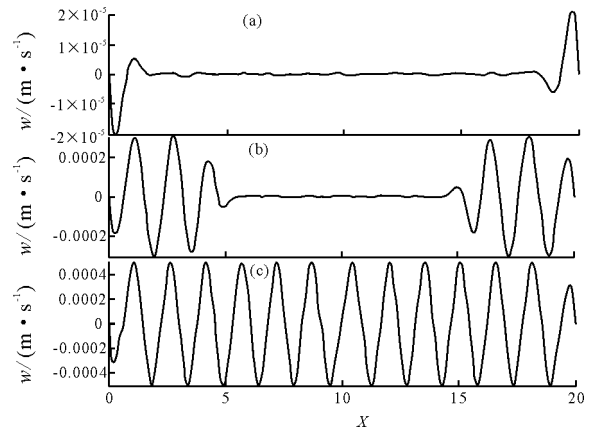


图 8 $\theta = 60^\circ$ 时在不同 r 下的流线图

3.2.2 相对瑞利数对流速的影响 图 9 中的 (a)、(b)、(c) 表示 $\theta = 4^\circ$, 相对瑞利数分别为 $r = 2, r = 3, r = 6$ 在腔体 1/2 高处的垂直流速。从图 9 中可以看出, 倾斜角度一定时, 相对瑞利数越大, 流速的极

值越大, 腔体中间如图 6 所示的 $X_0 < X < X_t$ 范围越来越小, $0 < X < X_0$ 与 $X_t < X < 20$ 范围内的振动次数也越来越多; 图 9 中的流速都是呈中心反对称分布。由此可见, 不同相对瑞利数时流速分布是由它的对流结构决定的。



注: 图中 (a) $r = 2$; (b) $r = 3$; (c) $r = 6$

图 9 $\theta = 4^\circ$ 时腔体 1/2 高度处的垂直流速

3.3 倾角对对流结构的影响

3.3.1 倾角对 streamline 的影响 图 10 是 $r = 6$ 时, 不同倾角情况下的对流结构图。从图 10 中可以看出, 随着倾斜角度的增大, 对流所形成的稳定状态下的滚动圈个数越来越少。 $\theta = 1^\circ$ 时有 25 个滚动圈, $\theta = 20^\circ$ 时有 17 个滚动圈, $\theta = 45^\circ$ 时只有一个滚动圈, 而且, 形成一个滚动圈的稳定状态后, 倾角增大, 封闭曲线由四周向中心发展。图 10 说明相对瑞利数一定时, 随倾角增大, 系统由多对流圈逐渐过渡到单对流圈。

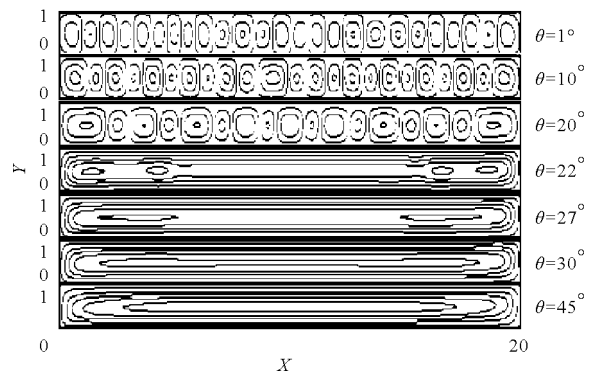


图 10 $r = 6$ 时不同倾角的流线图

3.3.2 倾角对流速的影响 图 11 (a)、11 (b)、11 (c) 表示相对瑞利数 $r = 6$ 时, 倾角分别为 $1^\circ, 22^\circ, 30^\circ$ 情况下腔体 1/2 高处的垂直流速。从图 11 中可以看出, 相对瑞利数一定时, 倾斜角度越大, 流速绝对值的最大值反而越小。图 11 (a)、(b)、(c)

的变化反映了对流从多滚动到单滚动的转变过程。

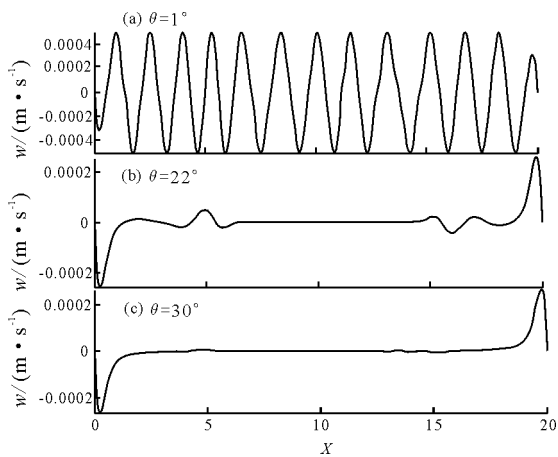


图 11 $r=6$ 时不同倾角的垂直流速

4 结 论

本文主要讨论了矩形腔体在一定倾斜角度下进行均匀加热的对流结构,也讨论了不同的控制参数对流线图及流速的影响。对于给定的普朗特数 $Pr=6.99$ 流体,计算了给定相对瑞利数,变化矩形腔体的倾斜角度和给定倾斜角度,变化相对瑞利数两种情况,通过分析这两种情况,可以得出如下结论。

(1) 给定倾斜角度且角度比较小时,随着相对瑞利数的增大,对流稳定状态下的滚动圈个数逐渐增多;给定倾斜角度且角度较大时,对流形成的流线图都是一个完整封闭的滚动圈,此时相对瑞利数对流线图影响较小;在垂直流速方面,相对瑞利数越大,流速绝对值的最大值越大。

(2) 给定相对瑞利数,随着倾斜角度的增大,对流稳定状态下的滚动圈个数逐渐减小,直至减少到只剩一个滚动圈。在垂直流速上,倾斜角度越大,流速绝对值的最大值越小。

参考文献:

- [1] CHANDRASEKHAR S. Hydrodynamics and hydromagnetic stability[M]. Oxford: Clarendon Press, 1961.
- [2] BATISTE O, KNOBLOCH E, Alonso A. Spatially localized binary fluid convection[J]. Journal of Fluid Mechanics, 2006, 560: 149 - 158.
- [3] NING Lizhong. Rayleigh - Benard convection in a binary fluid mixture with and without lateral flow[M]. Yangling: Northwest A & F University Press, 2006.
- [4] TARAUT A V, SMORODIN B L, LÜCKE M. Collisions of localized convection structures in binary fluid mixtures[J]. New Journal of Physics, 2012 14(9): 093055.

- [5] MOSES E, STEINBERG V. Competing patterns in a Convective Binary Mixture[J]. Physical Review Letters, 1986, 57(16): 2018 - 2021.
- [6] MOSES E, FINEBERG J, STEINBERG V. Multistability and confined traveling wave patterns in a convecting binary mixture[J]. Physical Review A, 1987, 35: 2757 - 2760.
- [7] HEINRICHS R, AHLERS G, CANNEL D S. Traveling waves and spatial variatin in the convection of a binary mixture[J]. Physical Review A General Physics, 1987, 35(6): 2761 - 2764.
- [8] ISABEL M, ORIOL B, ARANTXA A, et al. Convectons, anticonvectons and multiconvectons in binary fluid convection[J]. Journal of Fluid Mechanics, 2011, 667: 586 - 606.
- [9] 陶文铨. 数值传热学: 第 2 版[M]. 西安: 西安交通大学出版社, 2001.
- [10] 宁利中, 齐昕, 周洋, 等. 混合流体 Rayleigh - Bénard 行波对流中的缺陷结构[J]. 物理学报, 2009, 58(4): 2528 - 2534.
- [11] 余荔, 宁利中, 魏炳乾, 等. Rayleigh - Benard 对流及其在工程中的应用[J]. 水资源与水工程学报, 2008, 19(3): 52 - 54.
- [12] ISABEL M, ORIOL B, ARANTXA A, et al. Traveling convectons in binary fluid convection[J]. Journal of Fluid Mechanics, 2013, 722(5): 240 - 265.
- [13] TAKESHI W, MAKOTO I, YASUMASA N. Spontaneous formation of travelling localized structures and their asymptotic behaviours in binary fluid convection[J]. Journal of Fluid Mechanics, 2012, 712(35): 219 - 243.
- [14] KNOBLOCH E, MERCADER I, BATISTE O, et al. Convectons in periodic and bounded domains[J]. Fluid Dynamics Research, 2010, 42(2): 025505.
- [15] 宁利中, 王娜, 袁喆, 等. 分离比对混合流体 Rayleigh - Bénard 对流解的影响[J]. 物理学报, 2014, 63(10): 104401.
- [16] 宁利中, 余荔, 袁喆, 等. 沿混合流体对流分叉曲线上部分支波斑图的演化[J]. 中国科学(物理学, 力学, 天文学), 2009, 39(5): 746 - 751.
- [17] ZHAO Bingxin, TIAN Zhefu. Numerical investigation of binary fluid convection with a weak negative separation ratio in finite containers[J]. Physics of Fluids, 2015, 27(7): 074102.
- [18] MA Yanping, BURKE J, KNOBLOCH E. Defect - mediated snaking: A new growth mechanism for localized structures[J]. Physica D Nonlinear Phenomena, 2010, 239(19): 1867 - 1883.
- [19] 宁利中, 胡彪, 宁碧波, 等. Poiseuille - Rayleigh - Benard 流动中对流斑图的分区和成长[J]. 物理学报, 2016, 65(21): 214401.