

二维非对称 copula 函数在干旱特性联合概率中的应用

李亦凡, 李订芳

(武汉大学 数学与统计学院, 湖北 武汉 430072)

摘要: 随着全球气候变化和人类活动的影响,干旱特性分析正成为研究热点。在实际应用中,二维变量常表现出非对称性。基于 Liebscher 提出的非对称 copula 函数构造方法构造了二维非对称 copula 函数。以宜昌水文站日径流量数据为例,运用二维非对称 copula 函数对干旱历时和干旱峰值的联合概率分布进行分析。证明了构造二维非对称 copula 时,相关系数的变化规律定理,该定理可以作为 copula 函数选取的参考准则。采用 Rosenblatt 变换的 Bootstrap 法进行 copula 拟合度检验,检验结果表明二维非对称 copula 函数可以描述干旱特性的概率分布。

关键词: 非对称 copula 函数; 相关系数; 干旱特性; 联合概率; 干旱历时; 干旱峰值

中图分类号: P338⁺.6

文献标识码: A

文章编号: 1672-643X(2016)05-0236-05

Application of two dimensional asymmetric copula function in combined probability of drought characteristics

LI Yifan, LI Dingfang

(School of Mathematics and Statistics, Wuhan University, Wuhan 430072, China)

Abstract: With the change of global climate and the influence of human action, the analysis of drought characteristics has become a research hotspot. Because of the asymmetry of 2D variable in practical application, based on the asymmetric copula function proposed by Liebscher, the paper built 2D asymmetric copula function. Taking the daily flood data collected in Yichang hydrological station for example, the paper analyzed the Joint probability distribution of drought duration and peak value by use of 2D asymmetric copula function. It is proved that the law of variation of the correlation coefficient when a two-dimensional asymmetric copula is constructed, which can be used as a reference criterion for the selection of copula function. Bootstrap method of Rosenblatt transform is used to test the fitting degree of copula. Results show that the copula function can describe the probability distribution of drought characteristics.

Key words: asymmetric copula function; correlation coefficient; drought characteristics; combined probability; drought duration; drought peak value

早期的干旱特性变量的分析主要是通过单变量概率分布进行分析,即将干旱历时、干旱峰值等干旱特性变量作为独立的变量进行分析,但干旱特性变量间有较强的相关性,将其作为多变量联合分布进行分析更符合实际。

传统的多变量信息研究方法或是条件太过苛刻,或是过于概括化。Copula 函数将对多变量信息的研究分为边缘分布和相关性两部分,可以对边缘分布不同的随机变量进行计算,便于对其相关性做深入分析。Copula 函数已经有了较为完整的理论体系, Joe (1997)^[1]、Nelsen (2006)^[2] 和 Genest (2007)^[3] 详细地介绍了 copula 函数。

Copula 函数在水文领域中的应用十分广泛,郭生练等(2008)^[4] 分析探讨 Copula 函数在多变量水文计算领域的适用性及优越性。熊立华等(2005)^[5] 运用 copula 函数对多变量水文频率进行了分析。多变量概率分布中各个变量经常是非对称的,在变量的非对称性方面有许多研究成果:宋松柏等(2013)^[6] 运用 3 变量非对称阿基米德 copula 研究了干旱特性变量; Liebscher (2008)^[7] 提出了一种非对称 copula 的构造方法, Durante 等(2010)^[8] 通过上述方法对 MEV copula 增加了参数,使其适用范围更广; Salvadori 等(2010)^[9] 使用增加参数后的 MEV copula 分析了相邻水文站的年最大径流量数

据; Bedford 等 (2002)^[10] 介绍的 Pair - copula 是一种灵活的 copula 构造方法,能较好的体现变量间非对称的相依性,曾智等(2012)^[11] 运用 pair - copula 研究了干旱特性的联合概率分布。

本文根据 Liebscher (2008)^[7] 提出的非对称 copula 的构造方法,构造了具有非对称性质的二维 copula,并分析了用该方法构造非对称 copula 时,二维对称 copula 和二维非对称 copula 的相关系数 Kendall τ , Spearman ρ 以及尾部相关系数 λ 的关系,提供了是否选取独立 copula 构造非对称 copula 的一个参考准则。通过对宜昌水文站日径流数据进行分析,展示了二维非对称 copula 在干旱特性联合分布中的应用。

1 非对称 copula 函数

非对称的多维变量在实际应用中十分常见。二维非对称 copula 能描述变量间的非对称性,相比于二维对称 copula 更加灵活。例如,在变量正相关的情况下,二维对称 copula 必须满足 $C(u, v) = C(v, u)$, 而二维非对称 copula \bar{C} 可以有 $\bar{C}(u, v) \neq \bar{C}(v, u)$ 。二维非对称 copula 有许多种形式,本文采用 Liebscher(2008)^[7] 提出的一种方法构造二维非对称 copula。

1.1 非对称 copula 函数的构造

Liebscher(2008)^[7] 详细介绍了构造非对称 copula 的两种方法,本文运用 Liebscher 提出的增加参数的方法,构造二维非对称 copula 描述变量间的非对称性。Liebscher(2008)^[7] 的定理如下:

定理 1 设 $C_1, C_2, \dots, C_k: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ 为 copula 函数; $g_{ji}: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$, 且对任意 $j = 1, 2, \dots, k, i = 1, 2, \dots, d, g_{ji}$ 严格递增,或者恒等于 1, 若对任意 $i = 1, 2, \dots, d, \prod_{j=1}^k g_{ji}(v) = v$, 其中 $v \in [0, 1]$, 对任意 $j = 1, 2, \dots, k, i = 1, 2, \dots, d, \lim_{v \rightarrow 0^+} g_{ji}(v) = g_{ji}(0)$ 则:

$$\bar{C}(u_1, \dots, u_d) = \prod_{j=1}^k C_j(g_{j1}(u_1), \dots, g_{jd}(u_d)) \quad (1)$$

是一个 copula 函数。

定理 1 的二维形式为, $\bar{C}(u_1, u_2) = C_1(g_{11}(u_1), g_{12}(u_2)) \cdot C_2(g_{21}(u_1), g_{22}(u_2))$, 其中 C_1 和 C_2 为 copula 函数, g_{ji} 满足定理 1 中条件。由于 $g_{ji}(v)$ 的多样性, $\bar{C}(u_1, u_2)$ 可以描述变量间的非对称性。二维 Khoudraji copula^[13] 是 Liebscher 提出的方法构造的

非对称 copula 的一个特例。通过构造二维 Khoudraji copula, 本文研究了干旱特性的联合概率分布。二维 Khoudraji copula 取 $g_{11}(v) = v^{a_1}, g_{21}(v) = v^{1-a_1}, g_{12}(v) = v^{a_2}, g_{22}(v) = v^{1-a_2}$, 其表达式如下:

$$\bar{C}(u_1, u_2) = C_1(u_1^{a_1}, u_2^{a_2}) \cdot C_2(u_1^{1-a_1}, u_2^{1-a_2})$$

$a_1 = 1, a_2 = 1$ 时,

$$\bar{C}(u_1, u_2) = C_1(u_1, u_2) \cdot C_2(u_1^0, u_2^0) = C_1(u_1, u_2)$$

$a_1 = 0, a_2 = 0$ 时

$$\bar{C}(u_1, u_2) = C_1(u_1^0, u_2^0) \cdot C_2(u_1, u_2) = C_2(u_1,$$

$u_2)$, 所以 C_1 和 C_2 是 \bar{C} 的一种特殊情况。 $a_1, a_2 \in [0, 1]$ 时, \bar{C} 可以理解为处于 C_1 与 C_2 之间的 copula。

通过选取 a_1, a_2 的值, 可以使 \bar{C} 具有非对称性。例如在变量正相关情形下, 选取 a_1, a_2 满足 $a_1 \neq a_2$, 则 $\bar{C}(u_1, u_2) \neq \bar{C}(u_2, u_1)$, 即 \bar{C} 具有非对称性。

1.2 非对称 copula 函数相关系数变化规律

通过上述定理构造的非对称 copula \bar{C} 的相关系数相比于 C_1, C_2 会产生变化。本文证明了二维情形下, 运用上述定理由独立 copula Π 与满足一定条件的二维 copula C 构造二维非对称 copula \bar{C} 时 Kendall τ , Spearman ρ , 尾部相关系数 λ 的变化规律。

定理 2 C 为二维连续 copula 函数, $g_{ji}: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$, 且对任意 $j = 1, 2, i = 1, 2, g_{ji}$ 严格递增, 或者恒等于 1。若对任意 $i = 1, 2, \prod_{j=1}^2 g_{ji}(v) = v$, 其中 $v \in [0, 1]$, 对任意 $j = 1, 2, i = 1, 2, \lim_{v \rightarrow 0^+} g_{ji}(v) = g_{ji}(0)$, 则

$$\bar{C} = C(g_{11}(u), g_{12}(v)) \cdot g_{21}(u) \cdot g_{22}(v) \quad (2)$$

为 copula 函数。

(1) 当 copula 函数 C 对 $\forall u \in (0, 1], \forall v \in (0, 1], \forall x \in [u, 1], \forall y \in [v, 1]$, 满足 $C(x, v) \cdot \frac{u}{x} \leq C(u, v), C(u, y) \cdot \frac{v}{y} \leq C(u, v)$ 时, Kendall τ , Spearman ρ , 尾部相关系数 λ 有如下关系: $0 \leq \tau(\bar{C}) \leq \tau(C), 0 \leq \rho(\bar{C}) \leq \rho(C), 0 \leq \lambda(\bar{C}) \leq \lambda(C)$ 。

(2) 当 copula 函数 C 对 $\forall u \in (0, 1], \forall v \in (0, 1], \forall x \in [u, 1], \forall y \in [v, 1]$, 满足 $C(x, v) \cdot \frac{u}{x} \geq C(u, v), C(u, y) \cdot \frac{v}{y} \geq C(u, v)$ 时, Kendall τ , Spearman ρ , 尾部相关系数 λ 有如下关系: $\tau(C) \leq$

$$\tau(\bar{C}) \leq 0, \rho(C) \leq \rho(\bar{C}) \leq 0, \lambda(C) \leq \lambda(\bar{C}) \leq 0。$$

证明:(1) $\because g_{ji}: [0,1] \rightarrow [0,1], \prod_{j=1}^2 g_{ji}(u) = u, u \in [0,1] \therefore u \leq g_{ji}(u) \leq 1。$

当 $u = 0$ 或 $v = 0$ 时,

$$C(g_{11}(u), v) \cdot g_{21}(u) = C(u, v) = 0。$$

对 $\forall u \in (0,1], \forall v \in (0,1], \forall x \in [u,1],$

$$\forall y \in [v,1], C(x, v) \cdot \frac{u}{x} \leq C(u, v), \text{且 } u \leq g_{ji}(u)$$

$$\leq 1, v \leq g_{ji}(v) \leq 1, C(g_{11}(u), g_{12}(v)) \cdot g_{21}(u) \cdot g_{22}(v) = C(g_{11}(u), g_{12}(v)) \cdot g_{21}(u) \cdot \frac{v}{g_{12}(v)} \leq$$

$$C(g_{11}(u), v) \cdot g_{21}(u) = C(g_{11}(u), v) \cdot \frac{u}{g_{11}(u)} \leq$$

$$C(u, v), \text{即 } \bar{C}(u, v) \leq C(u, v)。$$

$\therefore \forall u \in [0,1], \forall v \in [0,1], \bar{C}(u, v) \leq C(u, v)。$ 根据 Joe(1997)^[2], 37 页, $\tau(\bar{C}) \leq \tau(C), \rho(\bar{C}) \leq \rho(C), \lambda(\bar{C}) \leq \lambda(C)。$

$\because C(x, v) \cdot \frac{u}{x} \leq C(u, v),$ 当 $x = 1$ 时, $\forall u \in (0,1], \forall v \in (0,1],$ 满足 $C(1, v) \cdot \frac{u}{1} = u \cdot v \leq C(u, v),$ 根据 Joe(1997)^[2], 37 页 $0 \leq \tau(\bar{C}), 0 \leq \rho(\bar{C}), 0 \leq \lambda(\bar{C})。$

$\therefore 0 \leq \tau(\bar{C}) \leq \tau(C), 0 \leq \rho(\bar{C}) \leq \rho(C), 0 \leq \lambda(\bar{C}) \leq \lambda(C)。$

运用类似方法可证(2)。

根据 Nelsen (2007)^[2] 定理 5.2.5, 定理 2(1) 中的条件是 (U, V) 满足 LTD($U|V$) 且 LTD($V|U$) 的充分必要条件: Copula 函数 C 对 $\forall u \in (0,1], \forall v \in (0,1], \forall x \in [u,1], \forall y \in [v,1],$ 满足 $C(x, y) \cdot \frac{u}{x} \leq C(u, v), C(u, y) \cdot \frac{v}{y} \leq C(u, v) \Leftrightarrow$ LTD($U|V$) 且 LTD($V|U$)。

根据 Nelsen (2007)^[2] 中证明的 LTD($U|V$) 且 LTD($V|U$) 的充分必要条件, 可以得出以下推论:

推论 1 如果 (U, V) 满足 SI($U|V$) 和 SI($V|U$), 则 $0 \leq \tau(\bar{C}) \leq \tau(C), 0 \leq \rho(\bar{C}) \leq \rho(C), 0 \leq \lambda(\bar{C}) \leq \lambda(C)。$

推论 2 如果 (U, V) 满足 LCS($V|U$), 则 $0 \leq \tau(\bar{C}) \leq \tau(C), 0 \leq \rho(\bar{C}) \leq \rho(C), 0 \leq \lambda(\bar{C}) \leq \lambda(C)。$

对于定理 2(2) 有类似的推论:

推论 3 如果 (U, V) 满足 SD($V|U$) 和 SD($U|V$), 则 $\tau(C) \leq \tau(\bar{C}) \leq 0, \rho(C) \leq \rho(\bar{C}) \leq 0, \lambda(C) \leq \lambda(\bar{C}) \leq 0。$

推论 4 如果 (U, V) 满足 LCS($V|U$), 则 $\tau(C) \leq \tau(\bar{C}) \leq 0, \rho(C) \leq \rho(\bar{C}) \leq 0, \lambda(C) \leq \lambda(\bar{C}) \leq 0。$

定理 2 (1) 表明当样本的 τ 大于 copula C 的 $\tau(C)$ 且满足定理 2 (1) 条件时, 通过 Liebscher(2008)^[7] 的方法运用独立 copula Π 和 C 构造二维非对称 copula \bar{C} 会使得 $|\tau(\bar{C}) - \tau| > |\tau(C) - \tau|$, 即 \bar{C} 相比于 C 不能体现样本中变量的。对于 Spearman ρ 以及尾部相关系数 λ 有类似的结论。定理 2 可以理解为由独立 copula Π 和满足定理 2 条件的 copula C 构造的二维非对称 copula \bar{C} 的变量相关性会弱于 C 的变量相关性。

定理 2 以及推论 1~4 提供了是否选取独立 copula Π 与 copula C 构造二维非对称 copula \bar{C} 的参考准则。通过比较原样本和二维 copula C 的 τ, ρ, λ , 可以推断是否应当选取独立 copula 与 Π 二维 copula C 构造二维非对称 copula $\bar{C}。$

2 应用案例

根据宜昌水文站 1882 - 2009 年的日径流量数据, 将日径流量最少的 5% 的日期作为干旱发生期, 干旱临界值为 $3\ 650\ \text{m}^3/\text{s}$, 共出现 174 次干旱事件, X_1 为干旱峰值变量, X_2 为干旱历时变量。

2.1 边缘分布

干旱峰值边缘分布服从广义 pareto 分布, 干旱历时边缘分布服从韦伯分布。运用极大似然法计算出干旱峰值与干旱历时边缘分布的参数值, 韦伯分布 F_1 的参数为 $k = 0.8518, \lambda = 12.4762$, 广义 pareto 分布 F_2 的参数为 $\xi = -0.2557, \sigma = 308.7844$ 。K-S 检验结果表明接受广义 pareto 分布为干旱峰值的边缘分布, 接受韦伯分布为干旱历时的边缘分布。设 $U_1 = F_1(X_1), U_2 = F_2(X_2), (U_1, U_2) \in [0,1]^2。$ (U_1, U_2) 的散点图如下。

2.2 二维对称 copula 函数

运用 Brechmann (2013)^[12] 提供的 R 语言 CDVine 程序包, 以 AIC 为 copula 函数选取准则, 在二维阿基米德 copula 函数、二维椭圆 copula 函数以及它们的旋转形式中选取 copula 函数, 并用极大似

然法进行参数估计。结果为选取二维对称 copula 为 Frank copula ,参数 $\delta = 7.9216$ 。

2.3 二维非对称 copula 函数

从图 1 中可以看出 (U_1, U_2) 的概率分布具有非对称性。用二维对称 copula C 描述 (U_1, U_2) 的概率分布不能体现 (U_1, U_2) 的非对称性。采用二维 Khoudraji copula^[13] 研究干旱特性的联合概率分布。

$$\bar{C}(u_1, u_2) = C(u_1^{a_1}, u_2^{a_2}) \cdot C_X(u_1^{1-a_1}, u_2^{1-a_2})$$

其中 \bar{C} 表示二维非对称 copula, C 表示二维对称 copula(Frank copula)。由于 U_1, U_2 有明显的正相关性,分别选定 C_X 为独立 copula Π 以及参数 $\theta = 50$ 的 clayton copula C_{cla} 得到两种不同的二维非对称 copula \bar{C}_{ind} 和 \bar{C}_{cla} 。用参数 $\theta = 50$ 的 clayton copula C_{cla} 代替 $C(u, v) = \min(u, v)$ 可以使程序计算更为方便。表 1 给出了 \bar{C}_{ind} 和 \bar{C}_{cla} 表达式以及用极大似然估计的参数 a_1, a_2 。

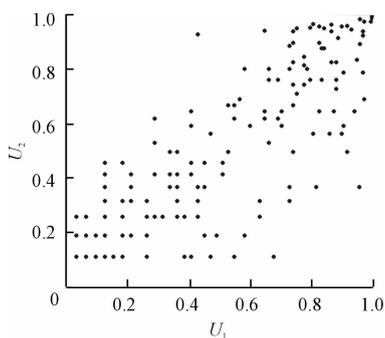


图 1 (U_1, U_2) 散点图

表 1 \bar{C}_{ind} 和 \bar{C}_{cla} 的表达式及参数

表达式	a_1	a_2
$\bar{C}_{ind}(u_1, u_2) = C(u_1^{a_1}, u_2^{a_2}) \cdot u_1^{1-a_1} \cdot u_2^{1-a_2}$	0.93	0.99
$\bar{C}_{cla}(u_1, u_2) = C(u_1^{a_1}, u_2^{a_2}) \cdot (u_1^{50a_1-50} + u_2^{50a_2-50} - 1)^{\frac{1}{50}}$	0.77	0.64

2.4 二维对称 copula 函数与二维非对称 copula 函数的比较

通过三个方面对比二维对称 copula C , 二维非对称 copula \bar{C}_{ind} 和 \bar{C}_{cla} :

- (1) Copula 选取准则 AIC, BIC, RMSE;
- (2) 相关系数 Kendall τ , Spearman ρ ;
- (3) 模拟样本中满足 $U_1 > U_2$ 样本在总模拟样本中所占的比例。表 2 列出了二维对称 copula C , 二维非对称 copula \bar{C}_{ind} 和 \bar{C}_{cla} 的对比结果。

表 2 C, \bar{C}_{ind} 和 \bar{C}_{cla} 的对比

对比项目	C	\bar{C}_{ind}	\bar{C}_{cla}
模型选择准则			
AIC	-176.3042	-172.7814	-184.3919
BIC	-173.1451	-163.3042	-174.9147
RMSE	0.0371	0.0378	0.0382
相关系数			
τ	0.6323	0.5997	0.5622
ρ	0.8095	0.8112	0.7572
样本比例			
$U_1 > U_2$	43.68%	49.85%	48.93%

AIC, BIC 准则表明 \bar{C}_{cla} 为 C, \bar{C}_{ind} 和 \bar{C}_{cla} 中最适合描述干旱特性的 copula 函数。 \bar{C}_{cla} 的 RMSE 最大, 但 C, \bar{C}_{ind} 和 \bar{C}_{cla} 的 RMSE 差距较小, 仍认为选取 \bar{C}_{cla} 描述干旱特性是最为合适。

可以证明二维对称 copula(Frank copula) C 满足定理 2(1) 的条件, 根据定理 2 运用 Π 与 C 构造的二维非对称 copula \bar{C}_{ind} 的变量的相关性会弱于 C , 即 $0 \leq \tau(\bar{C}_{ind}) \leq \tau(C), 0 \leq \rho(\bar{C}_{ind}) \leq \rho(C)$ 。应用实例中 $\tau(C) = 0.5997, \tau(\bar{C}_{ind}) = 0.5622, \rho(C) = 0.8112, \rho(\bar{C}_{ind}) = 0.7572$, 而原样本的 $\tau = 0.6323, \rho = 0.8095, \tau(\bar{C}_{ind}) < \tau(C) < \tau, \rho(\bar{C}_{ind}) \leq \rho(C) < \rho$, 原样本所体现的变量相关性强于 C 的变量相关性, 而 \bar{C}_{ind} 的变量相关性弱于 C 的样本相关性, 所以由 Π 与 C 构造的二维非对称 copula \bar{C}_{ind} 并不适合描述干旱特性, 与定理 2 的结论相符合。相比于 \bar{C}_{ind} , \bar{C}_{cla} 的相关系数接近于原样本, \bar{C}_{cla} 在变量相关性上优于 \bar{C}_{ind} 。

原样本满足 $U_1 > U_2$ 的样本占总样本的比例为 43.68%。 C, \bar{C}_{ind} 和 \bar{C}_{cla} 模拟样本的样本数为 10 000。因为 C 是二维对称 copula, 其模拟样本中满足 $U_1 > U_2$ 的样本比例为 49.85%, 接近 50%。 \bar{C}_{ind} 模拟样本中满足 $U_1 > U_2$ 的样本比例为 48.93%, 而 \bar{C}_{cla} 模拟样本中满足 $U_1 > U_2$ 的样本比例为 45.93%。以满足 $U_1 > U_2$ 的样本比例作为衡量非对称性的标准时, \bar{C}_{cla} 的非对称性强于 \bar{C}_{ind} 。

通过均分线图 2 和等值线图 3 可以更明显地体现 \bar{C}_{cla} 的非对称性。其中均分线图为用曲线 $u_2 = u_1^a$ 将平面分割成两部分, 通过调整 a 的值使得模拟样

本落在两部的样本点数相同。

均分线图2中, C 为二维对称copula,其模拟样本均分线接近于 $u_2 = u_1$, \bar{C}_{cla} 具有一定的非对称性,其模拟样本均分线处于原样本均分线与 C 的模拟样本均分线之间。等值线图3中,由于 C 为二维对称copula,其等值线关于直线 $u_1 = u_2$ 对称,而 \bar{C}_{cla} 的等值线与 C 不重合,且 $\bar{C}_{cla}(u_1, u_2) = 0.4$ 与 $C(u_1, u_2) = 0.4$ 有明显的交点,说明 \bar{C}_{cla} 有较为明显的非对称性。

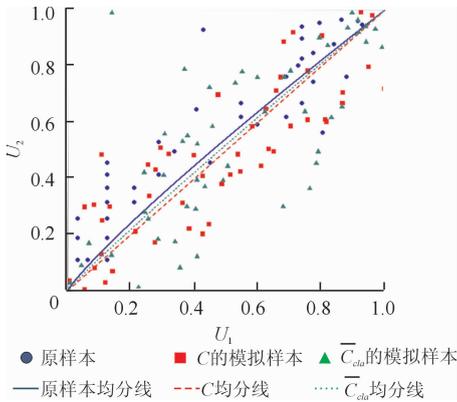


图2 原样本、 C 和 \bar{C}_{cla} 模拟样本的均分线

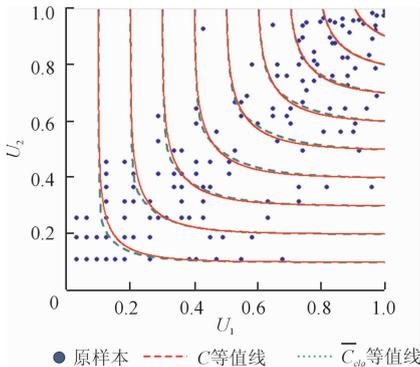


图3 原样本 C 和 \bar{C}_{cla} 的等值线

2.5 拟合度检验

采用 Rosenblatt 变换的 Bootstrap 法,选取显著水平 $\alpha = 0.05$,模拟样本数 $N = 3000$,进行 Anderson - Darling 检验^[14],得 \bar{C}_{cla} 的原样本统计量 $A^2 = 1.4788$,临界值 $A^{*2} = 1.9843$, $A^2 < A^{*2}$,接受二变量非对称 copula \bar{C}_{cla} 描述干旱特性的联合概率分布。

3 结论

本文探讨了二维非对称 copula 在干旱特性联合概率中的应用,证明了由二维独立 copula 和满足一定条件的二维 copula 构造二维非对称 copula 时相关系数的变化规律。运用 R 语言二维非对称 copula 的参数估计,可以方便地应用二维非对称

copula。以宜昌水文站日径流量数据分析干旱特性,展示了二维非对称 copula 的实际应用。结果表明,二维非对称 copula 拟合效果好于二维对称 copula,且能体现变量间的非对称性。二维非对称 copula 作为一种构造灵活的联合分布工具,其应用前景广泛,有待进一步研究。

参考文献:

- [1] Joe H. Multivariate models and multivariate dependence concepts[M]. CRC Press, 1997.
- [2] Nelsen R B. An introduction to copulas[M]. Springer Science & Business Media, 2007.
- [3] Genest C, Favre A. Everything you always wanted to know about copula modeling but were afraid to ask[J]. Journal of Hydrologic Engineering, 2007, 12(4): 347 - 368.
- [4] 郭生练, 闫宝伟, 肖义, 等. Copula 函数在多变量水文分析计算中的应用及研究进展[J]. 水文, 2008, 28(3): 1 - 7.
- [5] 熊立华, 郭生练, 肖义, 等. Copula 联结函数在多变量水文频率分析中的应用[J]. 武汉大学学报(工学版), 2005, 38(6): 16 - 19.
- [6] 宋松柏, 聂荣. 基于非对称阿基米德 Copula 的多变量水文干旱联合概率研究[J]. 水力发电学报, 2011, 30(4): 20 - 29.
- [7] Liebscher E. Construction of asymmetric multivariate copulas[J]. Journal of Multivariate analysis, 2008, 99(10): 2234 - 2250.
- [8] Durante F, Salvadori G. On the construction of multivariate extreme value models via copulas[J]. Environmetrics, 2010, 21(2): 143 - 161.
- [9] Salvadori G, Michele C D. Multivariate multiparameter extreme value models and return periods: A copula approach[J]. Water Resources Research, 2010, 46(10), 219 - 233.
- [10] Bedford T, Cooke R M. Vines: A new graphical model for dependent random variables[J]. Annals of Statistics, 2002, 30(4): 1031 - 1068.
- [11] 曾智, 宋松柏, 金菊良. Pair-copula 函数在多变量干旱特性联合概率中的应用[J]. 水文, 2012, 32(1): 60 - 64.
- [12] Brechmann E C, Schepsmeier U, Grün B. Modeling dependence with C- and D-vine copulas: The R-package CDVine[J]. Journal of Statistical Software, 2013, 52(3): 1 - 27.
- [13] Khoudraji, Abdelhaq. Contributions à l'étude des copules et à la modélisation de valeurs extrêmes bivariées[M]. 1996.
- [14] Dobrić J, Schmid F. A goodness of fit test for copulas based on Rosenblatt's transformation[J]. Computational Statistics & Data Analysis, 2007, 51(9): 4633 - 4642.