

# 强度准则和失稳判据对有限元强度折减法结果的影响

冯 旭

(杨凌职业技术学院, 陕西 杨凌 712100)

**摘 要:** 本文主要研究有限元强度折减法的强度准则和失稳判据问题,从强度折减法基本原理出发,将边坡强度参数进行折减,利用理论分析与数值计算相结合的方法,通过对比分析研究了强度准则与失稳判据的影响。研究表明:在  $\pi$  平面上强度准则围成的圆的半径越大,所得的安全系数则越大。与传统的极限平衡方法的安全系数结果相对比,等面积圆强度准则结果与之相近。3种边坡失稳判据中塑性区贯通判据判断的安全系数偏保守,与 Bishop 法计算结果较为一致,收敛标准的安全系数偏大。

**关键词:** 强度折减法; 强度准则; 失稳判据; 安全系数

中图分类号: TV861

文献标识码: A

文章编号: 1672-643X(2015)06-0189-04

## Influence of strength criterion and collapse criterion on result of strength reduction method of FEM

FENG Xu

(Yangling Vocation and Technology College, Yangling 712100, China)

**Abstract:** The paper mainly studied the strength criterion and collapse criterion of FEM with strength reduction. Starting from the basic principle of strength reduction method, it reduced some strength parameters of slope by reduction factors, combined theory analysis and numerical calculation, and studied some influences of strength rule and collapse criterion through comparison and analysis. The results show that the more the radius of a circle surround by strength criterion on plane, the greater the safety coefficient of slope becomes. The paper compared the safe coefficient with that from limit equilibrium method and that is near to the result from the strength criterion of equal-area circle. The result indicated that the solution based on the collapse criterion of the plastic region breakthrough is close to Bishop's solution, the safety coefficient of convergent standard is too large.

**Key words:** strength reduction technique; strength criterion; collapse criterion; safety coefficient

有限元强度折减法与传统的极限平衡方法相比在边坡稳定分析中的优势明显,但是这种方法目前在工程中的应用还不成熟。强度准则和失稳判断依据是利用有限元强度折减法研究岩土边坡安全的主要课题之一。在 20 世纪 70 年代,著名英国科学家 Zienkiewicz 最早在一篇论文中曾提出到,可以通过增加外荷载或降低岩土强度来计算岩土工程安全系数的方法,前者为超载法的基本思路,后者为强度折减法的基本想法<sup>[1-4]</sup>。

自 20 世纪 90 年代以来,随着数值分析技术的进步,在众多学者的推动下,强度折减法得到前所未

有的发展,并逐步应用于工程实际。近年来,对强度折减法理论基础的研究主要有应用拓展、安全系数的定义、强度准则和流动法则的选取、边坡破坏判据的标准等<sup>[5]</sup>。

自 2000 年以后,许多学者投入本领域研究。连镇营等<sup>[6]</sup>利用强度折减有限元法研究了开挖边坡的稳定性;以郑颖人院士为首的研究团队对有限元强度折减系数法计算土坡稳定安全系数的精度进行了研究,对有限元强度折减法中边坡失稳的判据进行了探讨<sup>[7-13]</sup>。这些研究工作对强度折减法的工程应用与普及推广起到的重要的作用<sup>[14-18]</sup>。

收稿日期:2015-06-20; 修回日期:2015-07-07

基金项目:陕西省水利科技计划项目(2015slkj-13)

作者简介:冯旭(1969-),男,陕西丹凤人,硕士,副教授,主要从事土木工程建设管理和施工技术的教学与研究工作。

本文以国际著名非线性有限元分析软件 ABAQUS 为工具,采用强度折减法的有限元非线性分析方法,对采用强度折减法在数值分析过程中的几个基本问题进行研究,以减小强度折减法在运行过程中的误差。这些方面主要包括有本构模型的选择、流动法则、强度准则、失稳判据、边坡滑裂面的确定、网格的疏密水平、边界范围等,本文主要研究强度准则、失稳判据这两个最重要的方面。

## 1 强度折减法的基本原理

根据英国学者 Zienkiewicz 定义,有限元强度折减法中边坡稳定安全系数的定义在本质上与传统极限平衡法中稳定安全系数具有相同的物理和力学意义。基于有限元强度折减法的边坡稳定分析方法的基本原理,就是将边坡强度参数黏聚力  $c$  和  $\tan\varphi$  ( $\varphi$  为内摩擦角) 同时除以一个折减系数  $F$ ,得到一组新的强度参数值  $c'$  和  $\tan\varphi'$ ,然后作为新的边坡岩体或土体材料参数输入到有限元分析中,进行试算,如果有限元分析过程中边坡还是稳定,再增加  $F$ ,减小  $c'$  和  $\tan\varphi'$  直至边坡达到极限平衡状态,发生剪切破坏,同时得到临界滑动面,此时对应的折减系数  $F$  即为最小安全系数。经过折减后的边坡岩土体剪切强度参数  $c'$  和  $\varphi'$  分别为:

$$\begin{aligned} c' &= c/F \\ \varphi' &= \arctan(\tan\varphi/F) \end{aligned} \quad (1)$$

式中:  $c$ 、 $\varphi$  为分析边坡原岩土体内黏聚力和摩擦角;  $c'$ 、 $\varphi'$  为分析边坡折减后的岩土体内黏聚力和摩擦角;  $F$  为边坡安全系数。

对于有限元强度折减法中边坡岩土体参数折减过程,可以 Mohr 应力圆以及强度包络线的移动来阐述这一强度折减变化过程,如图 1 所示。

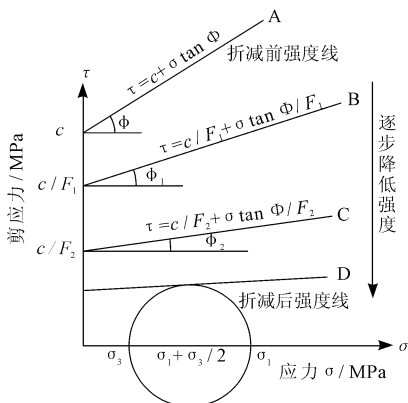


图 1 有限元强度折减法示意图

图 1 中有 A、B、C 及 D 等 4 条强度线,分别表示边坡岩土体的实际强度包线(A)、强度指标折减后

所得到的强度包线(B和C)和极限平衡即剪切破坏时的极限强度包线(D),图 1 中的圆形为表示一点的实际应力状态 Mohr 圆。

若初始分析时取边坡实际岩土体参数, Mohr 圆的所有部分都处于实际强度包线 A 之内,表明边坡体内任何点均未有发生剪切破坏;随着强度折减系数  $F$  的逐渐增大,边坡岩土体强度指标减小,应力姿态不变,强度指标折减后所得到的实际发挥强度包线(图 1 中强度包络线 B 和 C)逐渐向应力 Mohr 圆靠近。当强度折减系数  $F$  增大至某一特定值时,强度指标折减后所得到的实际发挥强度包线与 Mohr 圆正好相切(如图 1 中强度包络线 D),表明此时边坡岩土体所发挥的抗剪强度与实际剪应力达到临界平衡,表明实际土坡中该点土体在给定的安全系数  $F_s$  条件下达到极限平衡状态。通过对有限元强度折减法示意图的分析不难看出,强度折减法就是从直线 A 到直线 D 逐渐增加折减系数  $F$  使得强度线与 Mohr 应力圆相切的过程,刚好相切时的强度折减系数就称为该边坡的安全系数。

## 2 强度折减法中强度准则的影响研究

从理论上讲,有限元分析中岩土体中强度准则对边坡的安全性影响是直接而且明显的,选择不同的强度准则则会得到相同边坡不同安全系数,但是对实际的边坡而言,一个边坡的安全系数是一定的,所以说强度准则对有限元强度折减法的结果是有影响的。为了研究不同的强度准则对安全系数的影响,本文采用理想弹塑性模型和广义米赛斯强度准则,分析计算一典型的均质土坡,分别取以下 4 种情况:

- (1) 采用外角点外接圆强度准则;
- (2) 采用内角点外接圆强度准则;
- (3) 采用内切圆;
- (4) 等面积圆强度准则安全系数。

广义米赛斯强度准则如下式:

$$F = \alpha I_1 + \sqrt{J_2} = k \quad (2)$$

式中:  $I_1$ 、 $J_2$  分别为某一点应力张量的第 1 不变量和应力偏张量的第 2 不变量,当  $\alpha$  和  $k$  取不同的值就可以在有限元中实现不同的强度准则,如图 2。

如图 3 所示,一平面均质土质坡,坡高 20.0 m,坡比 1:1,弹性模量  $E = 20$  MPa,泊松比  $\nu = 0.3$ ,黏聚力  $c = 40$  kPa,内摩擦角  $\varphi = 20^\circ$ ,边坡土体容重  $\gamma = 20$  kN/m<sup>3</sup>,土体采用四节点四边形等参单元,为了研究不同强度准则对安全系数结果的影响,分析

时拟定的 3 种坡角 ( $30^\circ$ 、 $45^\circ$ 、 $60^\circ$ ) 以及 4 种强度准则进行计算,计算得到的边坡安全系数的结果如表 1 所示,为了对比经典的简化 Bishop 法和 Spencer 方法,本文也将这两个理论解列于表 1 中。

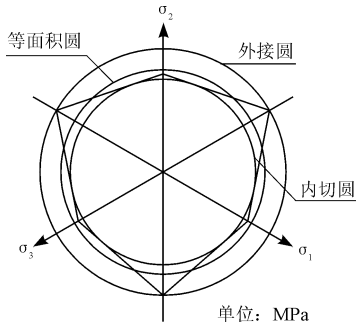


图 2  $\pi$  平面上不同的  $\alpha$  和  $k$  的屈服曲线

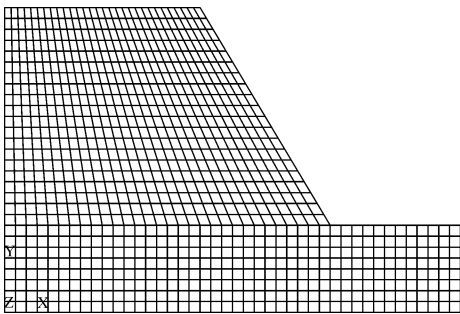


图 3 典型边坡有限元网格划分

表 1 不同条件下边坡的安全系数结果表

坡角/ ( $^\circ$ )	简化 Bishop 法	Spencer 法	外角点 外接圆 强度准则	用内角点 外接圆 强度准则	采用内 切圆	等面积 圆强度 准则
30	1.37	1.45	1.72	1.61	1.51	1.40
45	1.30	1.39	1.49	1.54	1.42	1.32
60	1.11	1.21	1.26	1.22	1.19	1.14

从表 1 中的计算结果分析可以得到,同一边坡强度准则的选取对边坡安全系数的影响十分明显,不同的强度准则计算方案得到的安全系数相差较大。如,对于坡角为  $45^\circ$  的边坡,当取外角点外接圆强度准则时安全系数为 1.49,用内角点外接圆强度准则时安全系数为 1.54,采用内切圆时安全系数为 1.42,等面积圆强度准则时安全系数为 1.32。

不同的强度准则间安全系数的变化还是有一定规律的,总体上表现在  $\pi$  平面上强度准则围成的圆的半径越大,则所得的安全系数则越大。这是因为相同的折减系数下,屈服圆的半径越大,计算得到的塑性区越小,所以得到的安全系数就越大。

比较这几种强度准则与简化 Bishop 和 Spencer 方法的安全系数结果,只有等面积圆强度准则的计

算结果与简化 Bishop 法计算结果相近。

### 3 强度折减法中边坡失稳判据的影响研究

采用强度折减有限元方法分析边坡稳定性以及计算安全系数的过程中,安全系数最终取决于边坡失稳判据的选取,可是在这方面,有限元边坡失稳判据如何选取,当前在强度折减法的边坡稳定性分析中边坡失稳判据并没有取得统一,主要有下列 3 种大类失稳判据:

(1)以边坡某个部位的位移或最大位移为标准(位移标准):无论是工程边坡还是自然边坡,其变形破坏总是具有典型的位移特性,因此,以边坡的有限元计算位移作为边坡失稳判据是最为直观的表达方法。采用有限元强度折减法对边坡稳定进行分析时,强度折减系数从起点开始增加,每一次折减系数对应不同的位移状态,当边坡某一部位的位移相对于前一折减系数陡然增大,即边坡位移发生突变时,边坡对应的状态即为边坡临界破坏状态,此时的折减系数即为边坡的安全系数。位移与折减系数关系曲线上表现为趋于水平。所以目前以位移作为失稳判据的一般方法是建立有限元计算的某个部位的位移或者最大的位移与折减系数的关系曲线,以曲线上的拐点作为边坡处于临界破坏状态的判据。

(2)以有限元计算不收敛为标准(收敛标准):对于材料的非线性,经过有限元离散后,问题归结为求解一个非线性代数方程组。一般地,将非线性方程问题转化为一组线性问题,通过迭代法或增量法使一系列线性解收敛于非线性解。在迭代法求解时,必须给出迭代的收敛标准,否则无法终止迭代计算。迭代收敛准则有位移准则、失衡力准则和能量准则 3 种。该失稳判据认为非线性有限元计算中,在给定的求解迭代次数和收敛标准内仍未收敛则认为破坏发生。

(3)以广义剪应变或广义塑性应变等某些物理量的变化和分布为标准(贯通标准):理论上,边坡的破坏过程总是伴随着一些物理量的出现和发展,如塑性应变区域、广义剪应变区域的发生、发展直到贯通。该失稳判据认为,当边坡体内的塑性应变或广义剪应变达到某一值或其分布基本贯通时,此时相对应的折减系数即可作为边坡的安全系数。

本文基于极限平衡及强度折减法对同一边坡的边坡安全系数分析,重点研究了边坡强度折减法 3 大失稳判据的影响,各类判据下所得到的边坡安全系数统计见表 2。

表2 不同边坡失稳判据下边坡的安全系数分析结果表

坡角/ (°)	简化 Bishop 法	Spencer 法	位移 标准	收敛 标准	贯通 标准
30	1.37	1.45	1.72	1.75	1.52
45	1.30	1.39	1.49	1.52	1.38
60	1.11	1.21	1.26	1.36	1.18

边坡岩土体在塑性区贯通之后,塑性区的范围还会继续发展,之后进一步发生破坏失稳,因此由边坡塑性区贯通判据判断的安全系数偏保守,而且得到的边坡稳定安全系数同基于极限平衡的 Bishop 法计算结果较为一致;对比塑性区贯通所得到的结果,收敛标准所得到安全系数偏大些,而位移标准安全系数为3种标准的中间值,表明了滑动而塑性区贯通是岩体破坏的必要条件,但不是充分条件,边坡的破坏还要看是否有很大的且无限发展的塑性变形和位移发生。对比塑性区贯通所得到的结果,该方法所得到安全系数偏大些;同样利用计算收敛性判据计算所得的安全系数偏大。

## 4 结 语

本文以有限元强度折减法中影响结果最为明显的两大因素——强度准则和失稳判据为研究对象,对强度准则和失稳判据的影响规律进行了分析,主要结论如下:

(1) 强度准则和失稳判据对有限元强度折减法的结果影响是显著的,如果不进行综合分析,其结果误差较大。

(2) 不同的强度准则间安全系数的变化还是有一定规律的,总体上表现在  $\pi$  平面上强度准则围成的圆的半径越大,则所得的安全系数则越大。与经典的简化 Bishop 法和 Spencer 方法的安全系数结果相对比,等面积圆强度准则结果与简化 Bishop 法计算结果相近。

(3) 对比3种边坡失稳判据与经典的简化 Bishop 和 Spencer 方法的安全系数结果,由边坡塑性区贯通判据判断的安全系数偏保守,而且得到的边坡稳定安全系数同基于极限平衡的 Bishop 法计算结果较为一致,收敛标准所得到安全系数偏大些,而位移标准安全系数为3种标准的中间值。

### 参考文献:

[1] Griffiths D V, Lane P A. Slope stability analysis by finite

elements[J]. Geotechnique, 1999, 49(3): 387-403.

[2] Dawson E M, Roth W H, Drescher A. Slope stability analysis by strength reduction [J]. Geotechnique, 1999, 49(6): 835-840.

[3] Duncan J M. State of the art: Limit equilibrium and finite element analysis of slopes [J]. Journal of Geotechnical Engineering, ASCE, 1996, 122(7): 577-596.

[4] Manzari M T, Nour M A. Significance of soil dilatancy in slope stability analysis [J]. Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering, ASCE, 2000, 126(1): 75-80.

[5] 关立军. 基于强度折减的土坡稳定分析方法研究[D]. 大连: 大连理工大学硕士学位论文, 2003.

[6] 连镇营, 韩国城, 孔宪京. 强度折减有限元法研究开挖边坡的稳定性[J]. 岩土工程学报, 2001, 23(4): 407-411.

[7] 徐干成, 郑颖人. 岩土工程中屈服准则应用的研究[J]. 岩土工程学报, 1990, 12(2): 93-99.

[8] 郑颖人, 赵尚毅. 岩土工程极限分析有限元法及其应用[J]. 土木工程学报, 2005, 38(1): 91-98, 104.

[9] 郑颖人, 赵尚毅. 用有限元强度折减法求边(滑)坡支挡结构的内力[J]. 岩石力学与工程学报, 2004, 23(20): 3552-3558.

[10] 雷文杰, 郑颖人, 冯夏庭. 滑坡加固系统中沉埋桩的有限元极限分析研究[J]. 岩石力学与工程学报, 2006, 25(1): 27-33.

[11] 宋雅坤, 郑颖人, 赵尚毅, 等. 有限元强度折减法在三维边坡中的应用研究[J]. 地下空间与工程学报, 2006, 2(5): 822-827.

[12] 张黎明, 郑颖人, 王在泉, 等. 有限元强度折减法在公路隧道中的应用探讨[J]. 岩土力学, 2007, 28(1): 97-101+106.

[13] 唐芬, 郑颖人, 赵尚毅. 土坡渐进破坏的双安全系数讨论[J]. 岩石力学与工程学报, 2007, 26(7): 1402-1407.

[14] 吴海真, 顾冲时. 有限元强度折减法在土石坝边坡稳定分析中的应用[J]. 水电能源科学, 2006, 24(4): 54-56+63.

[15] 谭波, 杨和平. 有限元强度折减法在膨胀土壑坡滑塌分析中的应用[J]. 长沙理工大学学报(自然科学版), 2006, 3(4): 18-22+38.

[16] 王先伟, 贺可强, 傅梅君. 有限元强度折减法在矿山开采中的应用[J]. 青岛理工大学学报, 2006, 27(3): 24-28.

[17] 尹莹, 王在泉, 王建新. 用有限元强度折减法对海底隧道进行稳定性分析[J]. 烟台大学学报(自然科学与工程版), 2007, 20(3): 210-214.

[18] 贾蓬, 唐春安, 杨天鸿, 等. 强度折减法在岩石隧道稳定性研究中的应用[J]. 力学与实践, 2007, 29(3): 50-55.