第24卷第4期
2013年 8月
水资源与水工程学报
Journal of Water Resources & Water Engineering
Vol.24 No.4
Aug.,2013

固液两相流中颗粒浓度分布统一公式的研究

林雪松[1a]，陈殿强[2]，何 峰[1b]，杜研岩[2]，张 亮[2]
(1.辽宁工程技术大学 a.理学院；b.力学与工程学院，辽宁 阜新 123000；
2.辽宁有色勘察研究院，辽宁 沈阳 110013)

摘 要：在固液两相流中，固体颗粒的浓度是随高度的变化而变化的，为表征这种变化，倪晋仁等提出了一个积分形式的浓度分布统一公式。该公式虽很有意义却并未有人给出解析解。通过使用变量代换和分解等数学手段，首先对统一公式进行求解，得出该公式的解析解，然后利用已有的实验数据和数值手段计算出公式中参数 n 的值，初步总结出影响 n 值的主要因素。

关键词：固液两相流；浓度分布；统一公式；n 值
中图分类号：O359　　**文献标识码**：A　　**文章编号**：1672-643X(2013)04-0082-03

Study on unified formula of particle concentration distribution in two – phase flow of liquid – solid

LIN Xuesong[1a], CHEN Dianqiang[2], HE Feng[1b], DU Yanyan[2], ZHANG Liang[2]
(1. *a. College of Science*; *b. Institute of Mechanics and Engineering*, *Liaoning Technical University*, *Fuxin* 123000, *China*;
2. *Liaoning Nonferrous Exploration and Research Institute*, *Shenyang* 110013, *China*)

Abstract: The concentration of solid matter in two – phase flow of liquid – solid gradually changes with the variety of height. In order to display this kind of change, professor Nijinren and other people gave an unified formula of concentration distribution. Though the formula is very useful, no one gives it's analytical solution. By using mathematical methods like variable exchanging, variable decomposing, etc, the equation is solved and the analytic solution is first acquired, then the n value of parameter is obtained through the usage of numerical method and experiment data, then the influence of the main factors on n value can be initialy concluded.

Key words: liquid-solid two-phase flow; concentration distribution; global equation; n value

在固液两相流中，固体颗粒的浓度是随垂向高度的变化而变化的[1-2]，即 $C = C(h)$。有人曾经分别从不同角度得出 $C(h)$ 的形式，但是实验证明所有的公式都只是在一定范围内适用。后来倪晋仁和王光谦提出的统一公式[1] 能较好的概括各种公式[3]，其形式为：

$$\int_{C_a}^{C}\frac{\mathrm{d}C}{C(1-C)^{\alpha}} = -\sqrt{2\pi}\,\frac{u_0}{u_*}\int_{\eta_a}^{\eta}\frac{\mathrm{d}\eta}{\eta(1-\eta)^{n}} \tag{1}$$

式中：$\eta = \dfrac{h}{H}$，$\eta_a = \dfrac{a}{H}$，H 为两相流的总高度。C_a 为 $h = a$ 处的体积比浓度，u_0 为单颗粒在静水中的沉降速度，u_* 为摩阻流速。公式中的 n 是一个待定常数，一般认为其值随实验条件的变化而变化。α 是一个正数，其值的变化范围是 $0 \sim 10$[3]。n 是一个意义和取值都相对模糊的参数，目前只知道 n 取不同值时统一公式可以蜕化为关于 C 的各种经验公式，也正是由于这个原因(1)式才被称作统一公式。要想充分利用统一公式，首先应该把它解出来。

1 统一公式的求解

在公式(1)两边，都涉及到同一种形式积分的计算，该积分为：

$$\int_{C_a}^{C}\frac{\mathrm{d}C}{C(1-C)^{\alpha}} \tag{2}$$

对公式(2)的计算是使公式(1)得以求解的关键，下面来求解这种积分。对于 α 的不同取值范围，积分式(2)会得到不同的结果，把 α 的值总结为两种情况，以下就这两种情况对积分分别求解。

收稿日期：2013-03-01；　**修回日期**：2012-03-19
基金项目：国家自然科学基金项目(11202091)
作者简介：林雪松(1979-)，男，辽宁丹东人，讲师，在读博士研究生，主要研究方向为尾矿坝安全中的力学问题。

1.1　当 $\alpha \geqslant 0$ 时

令 $\alpha = k + \beta$,k 为零和正整数,$0 \leqslant \beta < 1$。此时(2)式可以化为:

$$\int_{C_a}^{C} \frac{dC}{C(1-C)^k(1-C)^\beta}$$
$$= \int_{C_a}^{C} \left[\frac{1}{C} + \sum_{i=1}^{k} \frac{A_i}{(1-C)^i}\right] \frac{dC}{(1-C)^\beta}$$
$$= \int_{C_a}^{C} \frac{dC}{C(1-C)^\beta} + \sum_{i=1}^{k} A_i \int_{C_a}^{C} \frac{dC}{C(1-C)^{i+\beta}}$$

对于$\int_{C_a}^{C} \frac{dC}{C(1-C)^\beta}$,设$1 - C = t^3$,$C = 1 - t^3$,$dC = -3t^2 dt$,可以化为:

$$-3\int_{\sqrt[3]{1-C_a}}^{\sqrt[3]{1-C}} \frac{t^2}{(1-t^3)t^{3\beta}}\,dt = 3\int_{\sqrt[3]{1-C_a}}^{\sqrt[3]{1-C}} \frac{t^{3-3\beta-1}}{t^3-1}\,dt \qquad (3)$$

通过查阅积分表可知[4],当满足 $0 \leqslant \beta < 1$ 时,(3)的结果为:

$$\{-2\sin(1-\beta)2\pi\arctan\frac{2\sqrt[3]{1-C}+1}{\sqrt{3}} + \cos(1-\beta)2\pi\ln[(1-C)^{\frac{2}{3}} + \sqrt[3]{1-C}+1] + \ln(1-\sqrt[3]{1-C}\}_{C_a}^{C}$$

在这里$\frac{1}{C(1-C)^k} = \frac{1}{C} + \sum_{i=1}^{k}\frac{A_i}{(1-C)^i}$,这个等式中有未知系数 A_i,通过数学归纳法可以证明 $A_1 = A_2 = \cdots A_k = 1$。(2)式的最终结果为:

$$\{-2\sin(1-\beta)2\pi\arctan\frac{2\sqrt[3]{1-C}+1}{\sqrt{3}} + \cos(1-\beta)2\pi\ln[(1-C)^{\frac{2}{3}} + \sqrt[3]{1-C}+1] + \ln(1-\sqrt[3]{1-C}\}_{C_a}^{C} - [\sum_{i=1}^{k}\frac{(1-C)^{1-(i+\beta)}}{1-(i+\beta)}]_{C_a}^{C}$$

这里有一种特殊情况,式中的 $\beta = 0$(即 α 为正整数)时,最终的积分结果要改为:

$$[\ln C - \ln(1-C) - \sum_{i=2}^{k}\frac{(1-C)^{1-i}}{1-i}]_{C_a}^{C}$$

1.2　当 $\alpha < 0$ 时

设 $\alpha = -m + \beta$, $0 \leqslant \beta < 1$,m 为大于等于 1 的正整数,则积分式(2)化为:

$$\int_{C_a}^{C} \frac{(1-C)^m}{C(1-C)^\beta}dC$$
$$= \sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}(-1)^k\int_{C_a}^{C}\frac{C^{k-1}}{(1-C)^\beta}dC$$
$$= \int_{C_a}^{C}\frac{dC}{C(1-C)^\beta} + \sum_{k=1}^{m}\binom{m}{k}(-1)^k\int_{C_a}^{C}\frac{C^{k-1}}{(1-C)^\beta}dC$$

对于积分$\int_{C_a}^{C}\frac{C^{k-1}}{(1-C)^\beta}dC$,可以单独处理,令 $1 - C = t$,则 $C = 1 - t$,$dC = -dt$,该积分可以变为:

$$-\int_{1-C_a}^{1-C}\frac{(1-t)^{k-1}}{t^\beta}dt$$
$$= \sum_{i=0}^{k-1}\binom{k-1}{i}(-1)^{i+1}\int_{1-C_a}^{1-C}t^{i-\beta}dt$$
$$= [\sum_{i=0}^{k-1}\binom{k-1}{i}(-1)^{i+1}\frac{t^{i-\beta+1}}{i-\beta+1}]_{1-C_a}^{1-C}$$
$$= [\sum_{i=0}^{k-1}\binom{k-1}{i}(-1)^{i+1}\frac{(1-C)^{i-\beta+1}}{i-\beta+1}]_{\eta_a}^{\eta}。$$

将这个结果带回前面的积分式可得其结果为:

$$\{-2\sin(1-\beta)2\pi\arctan\frac{2\sqrt[3]{1-C}+1}{\sqrt{3}} + \cos(1-\beta)2\pi\ln[(1-C)^{\frac{2}{3}} + \sqrt[3]{1-C}+1] + \ln(1-\sqrt[3]{1-C})\}_{C_a}^{C} + [\sum_{k=1}^{m}\binom{m}{k}(-1)^k[\sum_{i=0}^{k-1}\binom{k-1}{i}\cdot(-1)^{i+1}\frac{(1-\eta)^{i-\beta+1}}{i-\beta+1}]_{\eta_a}^{\eta}。$$

1.3　总结

由前面的推导过程得出统一公式(1)可写成:

$$\{-2\sin(1-\beta)2\pi\arctan\frac{2\sqrt[3]{1-C}+1}{\sqrt{3}} + \cos(1-\beta)2\pi\ln[(1-C)^{\frac{2}{3}} + \sqrt[3]{1-C}+1] + \ln(1-\sqrt[3]{1-C})\}_{C_a}^{C} - [\sum_{i=1}^{k}\frac{(1-C)^{1-(i+\beta)}}{1-(i+\beta)}]_{C_a}^{C}$$
$$(\alpha \geqslant 0,\ \alpha = \beta + k,\ \beta \neq 0)。$$
$$[\ln C - \ln(1-C) - \sum_{i=2}^{k}\frac{(1-C)^{1-i}}{1-i}]_{C_a}^{C}$$
$$(\beta = 0,\text{即 } \alpha \text{ 为正整数})$$
$$-\sqrt{2\pi}\frac{u_0}{u_*}\{-2\sin(1-\beta)2\pi\arctan\frac{2\sqrt[3]{1-\eta}+1}{\sqrt{3}} + \cos(1-\beta)2\pi\ln[(1-\eta)^{\frac{2}{3}} + \sqrt[3]{1-\eta}+1] + \ln(1-\sqrt[3]{1-\eta})\}_{\eta_a}^{\eta} + [\sqrt{2\pi}\frac{u_0}{u_*}\sum_{i=1}^{k}\frac{(1-\eta)^{1+(i+\beta)}}{1-(i+\beta)}]_{\eta_a}^{\eta}$$
$$(n \geqslant 0,\ n = \beta + k)$$
$$-\sqrt{2\pi}\frac{u_0}{u_*}[\ln\eta - \ln(1-\eta) - \sum_{i=2}^{k}\frac{(1-\eta)^{1-i}}{1-i}]_{\eta_a}^{\eta}$$
$$(\beta = 0,\text{即 } n \text{ 为正整数})$$
$$-\sqrt{2\pi}\frac{u_0}{u_*}\{-2\sin(1-\beta)2\pi\arctan\frac{2\sqrt[3]{1-\eta}+1}{\sqrt{3}} + \cos(1-\beta)2\pi\ln[(1-\eta)^{\frac{2}{3}} + \sqrt[3]{1-\eta}+1] +$$

$$\ln(1-\sqrt[3]{1-\eta})\}_{\eta_a}^{\eta}+$$

$$[\sqrt{2\pi}\frac{u_0}{u_*}\sum_{k=1}^{m}\binom{m}{k}(-1)^{k+1}[\sum_{i=0}^{k-1}\binom{k-1}{i}(-1)^{i+1}\cdot$$

$$\frac{(1-\eta)^{i+(\beta+1)}}{i-\beta+1}]_{\eta_a}^{\eta}\qquad(n\leqslant 0,\ n=\beta-m)$$

这是一个复杂的等式,因为等式两边均需要在不同的情况取不同的表达式。右边的形式比较容易确定,只需要确定 α 值就可以了。在实际中利用 $\alpha=\frac{\ln u-\ln u_0}{\ln(1-C)}$ 来确定 α 的值。

2 n 值的研究

公式右边的 n 是一个与实验条件或具体工程环境有关的参数,但是到目前为止它究竟与那些因素有关还不清楚。如果要应用统一公式,必须要将 n 值计算出来。以公式的复杂程度来看,要解出这个值只能用数值方法,为此专门编写了一套完成这种计算所需的 Matlab 程序[5],然后以文献[6]中的实验数据为基础在 Matlab7.0 中运行程序,得到了在文献[4]的实验环境下的 n 值,并将解得的 n 值与高度浓度之间的关系绘制成如图1的曲线。

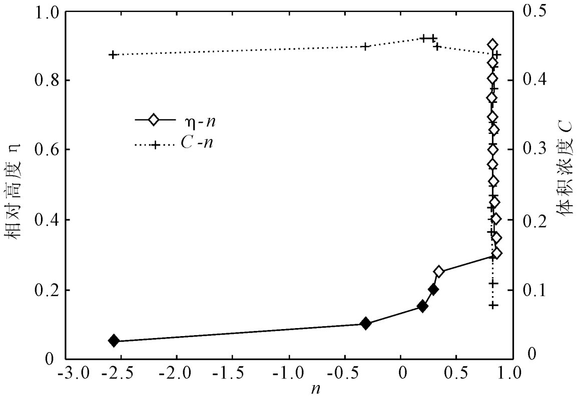

图1 n 值与高度和浓度之间的关系

从图1线中可以看出在大多数点上解出的 n 值都是常数,这说明浓度和高度可以作为影响该值的主要因素,但是在少数数据点上 n 值有些不太稳定,这也说明除了高度和浓度之外也许还有一些我们不知道的因素在影响着这个值。从图中还可以看出在所引用的数据中,n 值大约为0.8左右。

3 结 语

本文得到的方程解,虽然形式复杂,但是毕竟是解析形式,在实际应用中可以避免截断误差,对于有这方面需要的人来说,应该算是提供了一种新的选择。在一定实验条件下,n 的值应该为一常数,但是本文的 n 值还没有达到这个条件,这说明我们还没有真正确定影响 n 值的全部条件,至于具体全部条件都包括什么还有待于进一步研究。如果可以确定影响该值的全部条件,就可以总结出该值的实际意义同时给它一个准确的名称。在浓度、高度等因素确定的情况下,理论上讲 n 的值可能有无数个。在本次研究中我们并没有在过大的空间上搜索 n 值,可不可以把所有 n 的值都搜索出来进行研究,这也是一个新的研究方向。

参考文献:

[1] 倪晋仁,王光谦,廖 谦.高浓度固液两相流中泥沙分布的修正公式[J].泥沙研究,1999(5):18-21.

[2] 傅旭东,王光谦,廖 谦.低浓度固液两相流中的粗颗粒浓度分布[J].清华大学学报(自然科学版),2002,42(10):1361-1364.

[3] 倪晋仁,王光谦,张红武.固液两相流基本理论及其最新应用[M].北京:科学出版社,1991.

[4]《实用积分表》编委会.实用积分表[M].合肥:中国科学技术大学出版社,2006.

[5] 朱仁峰.精通 Matlab7[M].朱仁峰.北京:清华大学出版社.

[6] Michalik A. Density patterns of the inhomogeneous liquids in the industrial pipe-lines measured by means of radiometric scanning[J]. Houille Blanche,1973,28:53-57.