DOI:10.11705/j.issn.1672-643X.2021.05.26

基于光滑有限单元法的土石坝无压渗流场数值模拟

戴前伟^{1,2},孔重阳¹,雷轶^{1,2},张彬^{1,2},韩行进³

(1. 中南大学地球科学与信息物理学院,湖南长沙410012; 2. 中南大学有色金属成矿预测与地质 环境监测教育部重点实验室,湖南长沙410012; 3. 五凌电力有限公司,湖南长沙410004)

摘 要:获得自由面准确位置是无压渗流分析中最被关注的问题。采用光滑有限元法对土石坝无压渗流场进行数 值模拟,对不同模型的自由面位置进行求解,研究了渗透异常体对自由面和渗流参数的影响。根据梯度光滑技术, 建立了无压渗流问题的光滑有限元模型,该方法的优势在于将单元面积分优化为沿单元边界的线积分,简化了边 界相交单元的内部积分过程,降低了单元畸形对计算结果的影响。通过将矩形均质坝和梯形均质坝的经典算例计 算结果和其他数值方法的结果进行对比,说明了本文提出的方法的可行性。进一步研究了不同的渗透率异常体对 水头分布、渗流速度和流体压力等渗流参数的具体影响,这些结果为利用渗流参数分布的变化反演渗透异常体位 置,以及进行土石坝多场耦合提供了理论依据和可行策略。

关键词: 土石坝; 无压渗流分析; 自由面搜索; 光滑有限元; 渗流场

中图分类号:TV641 文献标识码: A 文章编号: 1672-643X(2021)05-0194-08

Numerical simulation of unconfined seepage field of earth – rock dams based on smoothed finite element method

DAI Qianwei^{1,2}, KONG Chongyang¹, LEI Yi^{1,2}, ZHANG Bin^{1,2}, HAN Xingjin³

(1. School of Geosciences and Info-physics, Central South University, Changsha 410012, China; 2. Key Laboratory of Metallogenic Prediction of Nonferrous Metals and Geological Environment Monitoring (Central South University), Ministry of Education, Changsha 410012, China; 3. Wuling Power Corporation Ltd., Changsha 410004, China)

Abstract: In the analysis of unconfined seepage, the key issue is to find the location of the free surface. Here, the smoothed finite element method (S – FEM) was used to calculate the location of the free surface in the saturated seepage region, and to simulate the influence of different permeability anomalies on the free surface and seepage parameters of earth – rock dams. According to the gradient smoothing technique, a smoothed finite element model for the unconfined seepage was established. The advantage of this method is that the element area is divided into line integrals along the boundary of the element, which simplifies the internal integration process of the boundary intersecting elements and reduces the influence of the element deformation on the calculation results. The calculation results of typical rectangular and trapezoid homogeneous dams were then compared with those of other numerical methods, and the effectiveness of the method proposed in this paper was verified. Meanwhile, the influence of different permeability anomalies on the seepage parameters such as water head distribution, seepage velocity and fluid pressure was further studied. These results can provide a theoretical support and feasible strategy for multi-field coupling of earth – rock dams, as well as for inversing the location of the permeability anomalies by changing the distribution of seepage parameters.

Key words: earth - rock dams; unconfined seepage analysis; free surface searching; smoothed finite element (S - FEM); seepage field

收稿日期:2021-05-08; 修回日期:2021-07-10

基金项目:国家自然科学基金项目(41704128、41874148);国家重点研发计划项目(2018YFC0603900)

作者简介:戴前伟(1968-),男,湖南娄底人,博士,教授,博士生导师,主要从事电磁法方法及理论、工程地球物理勘探等 方面的研究。

通讯作者: 雷 轶(1990 -), 男, 湖南邵阳人, 博士, 主要从事工程地球物理勘探、水文地质方面的研究。

1 研究背景

水利工程中水坝的修建能调节控制下泄水量, 从而降低洪涝等灾害带来的影响,并且提高水资源 的利用率,满足人们生产和生活的需要。无压渗流 问题在岩土工程、水利工程、地下水等领域广泛存 在,渗流或者孔隙压力过大会导致水坝失稳^[1]。土 石坝作为最常见的一种水坝类型,其坝体具有一定 的透水性,在水的渗流作用下容易发生渗漏而遭到 破坏^[2-4],因此需要对土石坝的渗流安全问题进行 更深入的研究。

目前,坝体的工程设计、施工、检测等常常要求探 测出自由面的位置,从而对坝体的渗漏情况进行初步 判断并提前做好相应的防渗措施,然而自由面的位置 和形状是事先未知的,并且在求解过程中会不断发生 变化[5],如何能高效准确地确定自由面以及渗流溢出 点的位置正是渗流分析中需要解决的关键问题^[6]。渗 流分析中最常用的方法是数值模拟,不同的数值模拟 方法已经被国内外的水文地质学者们应用于相应的研 究之中^[7]。Neumann^[8]率先利用固定网格的有限元法 对渗流自由面问题进行了求解,其主要特点是在求解 渗流自由面的迭代过程中不对原始单元网格进行修改 和调整。付延玲等^[9]将整个求解域的网格单元划分为 3种类型,在处理讨渡单元的渗透矩阵时,引入了双参 数罚函数,利用流量等效法对渗透系数进行调整,提高 了计算过程的效率以及结果的精度。唐红影^[10]对弃单 元法进行改进,使计算域逐渐靠近实际渗流区域,并对 复合单元进行二次细分,降低了网格单元对计算精度 的影响。Darbandi 等^[11]提出的有限体积法确保了单元 的质量守恒,但要求网格与自由面相匹配。Chugh 等^[12]的边界元法只对域边界进行离散,通过移动边界 节点可以简单地改变域的几何结构,虽然可以降低问 题的维数,简化求解,但对于非均匀区域和非线性问 题,边界元法很难求解。Zheng 等^[13]将数值流形方法 与无网格 Galerkin 方法相结合,对非均质坝体的自由 面进行了数值模拟,通过增加积分点支撑域的场节点, 计算精度得到了很大提高。Zhang 等^[14]用移动 Kriging 无网格法和蒙特卡罗积分法分析了无约束渗流问题, 但在迭代过程中会移动场节点,这给有限元分析中自 适应网格法的使用带来了一定的困难。Dai 等^[15]提出 了一种新的综合方法,将自适应网格策略与 Galerkin 有限元法相结合,对自由曲面的位置进行搜索,取得了 很好的效果。

本文将光滑有限元法应用于无压渗流问题的分

析中,建立二维无压渗流问题的光滑有限元模型,在 饱和渗流区域计算求解自由面的位置。通过对矩形 均质坝和直角梯形均质坝经典算例的计算,并与其 他数值方法的结果进行对比来验证本文方法的有效 性。同时模拟了土石坝中不同的渗透异常体对渗流 速度、流体压力、水头分布等渗流参数的具体影响, 为之后的渗流反演提供相应的依据。

2 无压渗流问题的数学描述

为了方便描述无压渗流问题,以图 1 为例示意 土石坝中的无压渗流。图 1 中的问题域被自由面 AE 分为两部分,自由面以上的部分 $\Omega_{\rm U}$ 为不饱和 域,以下的部分 $\Omega_{\rm s}$ 为饱和域。假设问题域中渗流 仅仅流经饱和区域。无压渗流分析中最重要的问题 即为自由面的求解,只要寻找到自由面的位置,饱和 域与不饱和域便可区分开来。



在坝体饱和域中,任意一点的水头值的数学表 达式为:

$$\phi = \frac{p}{\rho g} + y \tag{1}$$

式中: ϕ 为渗流测压水头,m;p为流体压力,Pa; ρ 为 流体密度,kg/m³;g为重力加速度,m/s²;y为竖直 方向坐标,m。

饱和域中流体连续性方程为:

$$\nabla \cdot v = 0 \tag{2}$$

根据达西定律,饱和域中的渗流速度 v 为:

$$v = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} k_x & 0 \\ 0 & k_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial \Phi}{\partial x} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial y} \end{pmatrix}$$
(3)

式中: v_x 、 v_y 分别为水平向、竖直向的渗流速度,m/s; k_x 、 k_y 分别为水平向、竖直向的渗透系数,m/s。

将公式(3)代人公式(2)中,可得到二维无压 稳定渗流的微分方程^[16]:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(k_x \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k_y \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) = 0 \tag{4}$$

在图1中,相应边界条件如下:

(1) 上下游库水 AB、尾水 CD 水头边界条件:

$$\phi_{AB} = H_1 \tag{5}$$

 $\phi_{CD} = H_2 \tag{6}$

(2) 底部边界 BC 为不透水边界,其外法向方向 流量 q_n 为0,即满足流量边界条件:

$$q_n = \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n} = 0 \tag{7}$$

式中:n 为单位外法向向量。

(3) 自由面 AE 需同时满足两个边界条件:
$$q_n = 0, \phi = y$$
 (8)

(4) 渗流面 DE 边界条件:
$$q_x \leq 0, \phi = \gamma$$

即在渗流面上有流量流出。

3 无压渗流场的光滑有限元模型

本部分简要介绍应用在无压渗流问题中的光滑 有限元法。利用固定网格将整个问题域进行离散化, 每个节点的水头值可以通过插值得到:

$$u^{h}(x) = N \cdot H \tag{10}$$

式中:N为形函数矩阵;H为网格节点的水头值。

求解无压渗流问题控制方程的过程中,需要得 到水头梯度,而该值的获得需要计算出形函数梯度。 在经典有限元法中,形函数梯度矩阵由形函数求导 得到,而在光滑有限元法中,利用梯度光滑技术得到 形函数梯度矩阵:

$$\overline{\nabla} N(x) = \int_{\Omega_k^s} \left[\nabla N(x) \overline{W}(x_k - x) \right] d\Omega \qquad (11)$$

式中: $\overline{\nabla}N(x)$ 为光滑形函数梯度; $\nabla N(x)$ 为形函数 梯度; $\overline{W}(x_k - x)$ 为光滑函数或者权函数; Ω_k^s 为所 计算的光滑域。

本文中采用的光滑函数为 Heaviside - type 型函数:

$$\overline{W}(x_k - x) = \begin{cases} \frac{1}{A_k^s} & (x \in \Omega_k^s) \\ 0 & (x \notin \Omega_k^s) \end{cases}$$
(12)

式中: A_k^s 为所计算的光滑域 Ω_k^s 的面积,m²。

利用高斯散度定理(或者是分部积分法),将面积 分转化为线积分,并将公式(12)代入公式(11)得:

$$\overline{\nabla} N(x) = \int_{\Omega_k^s} [\nabla N(x) \overline{W}(x_k - x)] d\Omega$$
$$= -\int_{\Omega_k^s} [N(x) \nabla \overline{W}(x_k - x)] d\Omega + \frac{1}{A_k^s} \int_{\Gamma_k^s} N(x) n d\Gamma$$
$$= \frac{1}{A_k^s} \int_{\Gamma_k^s} N(x) n d\Gamma \qquad (13)$$

式中: Γ_k^s 为光滑域 Ω_k^i 的边界, $n = [n_x, n_y]$ 为 Γ_k^i 上的单位外法线向量。

由公式(13)可知,光滑梯度技术将原先二维的 面积分转换成沿着边界进行的线积分。将公式(13) 代入节点水头公式(10)中得到:

$$\overline{\nabla} u^{h}(x) = \overline{B} \cdot H \tag{14}$$

$$\overline{\boldsymbol{B}} = \frac{1}{A_k^s} \int_{\Gamma_k^s} N(\boldsymbol{x}) \boldsymbol{n} \, \mathrm{d} \boldsymbol{\Gamma} = \begin{bmatrix} \bar{\boldsymbol{b}}_x & \bar{\boldsymbol{b}}_y \end{bmatrix}$$
(15)

其中:

(9)

$$\bar{b}_{h} = \frac{1}{A_{k}^{s}} \int_{\Gamma_{k}^{s}} [N(x)n_{h}(x)] d\Gamma \quad (h = x, y) \quad (16)$$

将控制方程和边界条件改写为积分弱形式,并 将水头插值代入得到无压渗流问题的 Garlerkin 弱 形式:

$$\overline{\mathbf{K}} \cdot H = R \tag{17}$$

$$\overline{\mathbf{K}} = \int_{\Omega} \overline{\mathbf{B}}^{\mathrm{T}} k \overline{\mathbf{B}} \mathrm{d}\Omega$$
(18)

式中: K 为光滑刚度矩阵。

弱形式中, R 与自然边界条件相关, 由前文边界条件可知边界沿外法向方向流量为0, 即 $R = 0^{[17]}$ 。

利用固定网格法求解无压渗流问题,可以降低 对网格的依赖性,并且不需要在迭代过程中进行网 格的修改。由于网格是固定的,每次迭代过程中得 到的自由面会将整个求解域分为上下两部分,产生 3种类型的光滑单元,如图2所示,自由面以上的单 元称为外部光滑单元,以下的称为内部光滑单元,自 由面经过的单元称为相交光滑单元。由于采用的是 四边形单元,自由面经过相交光滑单元时会将该单 元切分成不同的形状,可能出现的切分形状如图3 所示。



本文的研究只考虑自由面以下区域,所以自由 面以上的外部光滑单元形成的刚度矩阵对求解过程 的影响暂不考虑,对整个求解域来说,真正考虑的是 内部光滑单元和相交光滑单元形成的刚度矩阵 *K*, 其计算公式如下:

$$\overline{\boldsymbol{K}} = \int_{\Omega_1} \overline{\boldsymbol{B}}^{\mathrm{T}} k \overline{\boldsymbol{B}} \mathrm{d}\boldsymbol{\Omega} + \int_{\Omega_2} \overline{\boldsymbol{B}}^{\mathrm{T}} k \overline{\boldsymbol{B}} \mathrm{d}\boldsymbol{\Omega}$$
(19)

式中: *Ω*₁ 为内部光滑单元区域; *Ω*₂ 为相交光滑单元 区域。

在每个单元上运用梯度光滑技术得到单元的水 头值梯度,公式(19)可改写为单元积分和的形式:

$$\overline{K} = \sum_{A1 \in \Omega_1} \int_{\Omega_{A1}} \overline{B}^{\mathrm{T}} k \overline{B} \mathrm{d}\Omega + \sum_{A2 \in \Omega_2} \int_{\Omega_{A2}} (\overline{B}^{\mathrm{T}} k \overline{B} \mathrm{d}\Omega$$
(20)

在计算过程中,认为每个网格中的渗透系数为 常数,而且光滑形函数梯度矩阵也为常数矩阵,则总 体刚度矩阵为:

$$\overline{\boldsymbol{K}} = \sum_{A1 \in \Omega_{1}} (A_{A1}^{S} \overline{\boldsymbol{B}}_{A1}^{T} k_{A1} \overline{\boldsymbol{B}}_{A1}) + \sum_{A2 \in \Omega_{2}} (A_{A2}^{S} \overline{\boldsymbol{B}}_{A2}^{T} k_{A2} \overline{\boldsymbol{B}}_{A2})$$
(21)

4 迭代求解算法

利用光滑有限元法求解无压渗流问题,根本目的 是寻找自由面的位置,根据自由面满足的边界条件, 不断在迭代过程中更新自由面位置和形状,直至达到 一定的收敛条件。具体的迭代过程如图4所示。



(1)选择1个线段作为初始自由面,如图4中 AD。自由面的溢出点需要在CE上,而初始点位于 BF上。

(2) 在 CE 上选择一点 D 作为自由面溢出点的 初始解。

(3) 连接点 A 与 D, 形成的线段 AD 作为自由 面的初始解。

(4)将初始自由面 AD 切分成一系列控制点
H₁,H₂,…,H_n。选择如图 4 所示的 BC 线段做为基
线,并将基线 BC 划分为一系列基点 G₁,G₂,…,G_n。

(5) 分别连接 H₁ 点与 G₁ 点, H₂ 点与 G₂ 点,

…,H_n点与 G_n点,得到一系列射线 H₁G₁、H₂G₂、…、 H_nG_n。在迭代过程中,控制点 H₁,H₂,…,H_n组成了 自由面,并且这些控制点会沿着相应的射线移动,形 成新的自由面。

上述准备工作完成后,利用假设的初始自由面 AD 解上述方程,可以得到求解域各个节点的水头 值。在这一步骤中,控制点的位置必须沿着射线进 行修改以满足自由面上的边界条件。控制点的垂直 坐标表示为:

$$y_i^{new} = y_i^{old} + \lambda \sigma_i \tag{22}$$

$$\boldsymbol{\tau}_i = \boldsymbol{h}_i - \boldsymbol{y}_i^{old} \tag{23}$$

式中: y_i^{old} 和 y_i^{new} 分别为第 i 个控制点在前一次和下 一次迭代的高程值; h_i 为在控制点处计算得到的测 压水头值; λ 为给定的步长,本文取 λ = 0.8。若步 长过小,则迭代次数增多,计算消耗较大;若步长过 大,则难以到达收敛状态。在能达到收敛状态的情况 下,选择适合的步长来减少迭代次数,降低计算消 耗。每次进行迭代前进行如下判断:

$$\frac{\mid \sigma_1 \mid + \mid \sigma_2 \mid + \dots + \mid \sigma_n \mid}{n} < \varepsilon$$
 (24)

式中:n为控制点个数; c 为非常小的参数,本文中 取值为 c = 10⁻³,该值越小,说明计算结果中控制点 水头值与高程值越接近,但迭代次数会增加、计算消 耗增大,也有可能出现迭代难以收敛的问题;该值越 高,则计算结果的误差越大,难以满足计算精度的要 求。如果判断式(24)得以满足,则迭代过程终止,否 则根据公式(22)、(23)对控制点位置进行更新。

5 算例分析

算例分析即利用本文提出的算法来求解无压渗 流问题经典模型和异常体模型的自由面位置,通过 与其他方法^[11,15,18-20]在标准模型应用得到的结果 进行对比来验证本文算法的有效性,在异常体模型 中研究异常体的存在对渗流速度、水头分布、流体压 力等渗流场参数的影响。

5.1 矩形均质坝模型(示例1)

示例 1 采用的经典模型为高 11 m,宽 5 m 的矩 形均质坝模型。上游库水的水头值 $H_1 = 10$ m,下游 水头值 $H_2 = 2$ m。根据文献[17]、[21]中选取的渗 透系数值,本部分渗透系数设置为 1 m/s,底部边界 设置为不透水边界。所采用的网格如图 5(a)所示, 初始自由面和计算得到的自由面位置如图 5(b)所 示。假设该模型的渗流区域为均质各向同性介质, 初始自由面可以由 Dupuit 公式得到:

$$y = \sqrt{H_1^2 - \frac{x}{L}(H_1^2 - H_2^2)}$$
(25)

式中: H_1 、 H_2 分别为上游库水、尾水的水头值,m; L 为底部边界的长度,m。

示例1中本文方法对自由面计算结果与其他方 法计算结果的对比如图6(a)所示,本文方法计算得 到的水头等值图、渗流速度图及流体压力等值图如 图6(b)~6(d)所示。由图6(a)可看出,本文方法 计算得到自由面位置与其他方法得到的自由面位置 具有很好的一致性,因此本文方法可以很好地预测 自由面以及溢出点的位置。图6(d)中的流体压力 可通过公式(1)计算得到,其零压力等值线与自由 面位置相吻合。



图 5 示例 1 中网格尺寸及初始自由面与最终自由面结果对比



图 6 示例 1 中自由面本文方法与其他方法计算结果对比及渗流场各参数计算结果

5.2 具有单异常体矩形坝模型(示例2和示例3)

在土石坝中,由于介质渗透系数的不同,自由面的位置会受到一定的影响^[21]。实际中常常需要根据自由面的位置和形状推测渗透异常区域的位置,因此研究异常体对自由面所产生的影响是十分有必要的。示例2和示例3的模型尺寸、边界条件和网格与示例1相同,但在模型中加入了不同渗透系数的异常体,将具有不同异常体位置(近自由面和远自由面)的两个模型分别设为示例2和示例3。分别对示例2和示例3计算表1中列出的4种不同的渗透系数情况下的自由面位置及流场分布,示例2和示例3背景区域的渗透系数设置为1m/s。

表1 示例2和示例3模型中异常体不同渗透率的溢出点高程

异常体类型	渗透系数/ (m・s ⁻¹)	溢出点高程/m	
		示例2	示例3
低渗异常1	0.1	6.3288	6.4116
低渗异常 2	0.5	6.3864	6.4369
高渗异常 3	3.0	6.5334	6.4537
高渗异常 4	25.0	6.6533	6.4917
背景区域	1.0	6.4635	6.4635

与示例1相同。示例2近自由面渗透异常体位 置及异常体不同渗透情况下的自由面计算结果见图 7,模型流场分布见图8;示例3远自由面渗透异常 体位置及异常体不同渗透情况下的自由面计算结果 见图9,模型流场分布见图10。





由图 7(b)可以看出,当异常体位置靠近自由面时,自由面受异常体影响较大。当异常体渗透系数高于背景区域渗透系数时,自由面向异常体方向弯曲; 而异常体渗透系数低于背景区域时,自由面向异常体 相反方向弯曲。且异常体渗透系数与背景区域渗透 系数差值越大,则自由面受影响程度越大。由图9(b) 可以看出,当异常体位置距离自由面较远时,自由面 受异常体影响较小。由表1可知,溢出点位置受异常体的影响,异常体离自由面越近,对其位置的影响越大,异常体位置较远时,溢出点位置的变化不大。



图 10 示例 3 异常体不同渗透情况下的模型渗流场

5.3 具有多异常体矩形坝模型(示例4)

示例4旨在探讨高渗透和低渗透多种不同渗透异 常体对水头分布、渗流速度和流体压力的影响。各异 常体的具体位置如图 11(a)所示。背景区渗透系数仍 设为1 m/s,低渗透系数和高渗透系数分别设为0.1 和 10 m/s,高渗和低渗异常体的渗透系数均与背景区域 相差 10 倍。模型的边界条件和网格与示例1 — 致。

具有多种不同渗透异常体的自由面计算结果如

图 11(b) 所示,水头等值图、渗流速度图及流体压力 等值图如图 12 所示。由图 12(a)、12(b) 可看出,高 渗透区域渗流速度增大,水头等值线变稀疏,低渗透 区域排斥周围渗流,通过低渗透区域的渗流速度减 小,低渗透区域水头等值线变密集。两个低渗透区 域对水头和渗流流速的影响程度也不相同,深部的 低渗透区域对周围水头和渗流流速的影响更加明 显。在图 12(c)中,流体压力随异常渗透率的不同 而发生变化,流体压力等值线在高渗透区域变得稀 疏,而在低渗透区域变得密集。

通过研究不同渗透系数的异常体对渗流场参数 分布产生的具体影响,有利于后续开展通过渗流场 参数分布来反演异常体位置的研究。

5.4 梯形均质坝模型(示例5)

例5采用了直角梯形断面形状的十石坝模型。坝底 长为7m,坝宽为2m,上游库水高程为5m,下游尾 水高程为1m。该模型中的网格划分如图13(a)所 示,求解域的渗透系数设置为1 m/s。以本文方法 计算得出的最终自由面如图 13(b)所示。

果对比及模型渗流场见图 14。由图 14 可看出,利用光

滑有限元法计算得到的结果与其他方法具有很好的一 致性:随着深度的增加,渗流速度大小逐渐增大,且溢 出点位置以上和以下的渗流均有流向溢出点的趋势。



11

10

9

8

7

6

5

4

3

2

1

0

高程/m

201

6 结 论

本文采用光滑有限元法对土石坝无压渗流场进 行数值模拟,通过在经典算例模型中和其他方法结 果的对比验证了文中方法的有效性。研究了不同渗 透系数异常体对水头分布、渗流速度和流体压力等 渗流场参数的影响,得到如下结论:

(1)通过光滑梯度技术将单元面积分优化为沿着边界进行的线积分,建立了无压渗流问题的光滑 有限元模型,不需要对形函数进行求导运算,减少了 计算量,消除了对网格形状的依赖性,在处理因自由 面穿过而产生的畸形单元时更加灵活。

(2) 对经典模型的自由面计算结果与其他方法 得到的自由面结果基本一致,验证了本文方法的有 效性。异常体模型的数值模拟结果表明,自由面和 溢出点的位置会受异常体位置和渗透系数的影响。

(3)通过研究异常体对水头分布、流体压力和 渗流速度等渗流场参数的具体影响,为利用渗流场 参数分布来反演渗透异常体位置的研究奠定基础。

参考文献:

- [1] 郑珊珊.求解渗流自由面的逐步剖分法[D].烟台:烟 台大学,2017.
- [2] 王正成,毛海涛,申纪伟,等. 深厚覆盖层中局部强透水 层对渗流的影响研究[J].水资源与水工程学报,2019, 30(4):159-166.
- [3] 刘豪杰,任杰,杨杰,等.深厚覆盖层土石坝渗流控制及
 三维数值分析[J].水资源与水工程学报,2018,29(2):
 219-224+228.
- [4] 沈振中,邱莉婷,周华雷. 深厚覆盖层上土石坝防渗技术 研究进展[J]. 水利水电科技进展,2015,35(5):27-35.
- [5] 李 珂,韩 勇,朱永峰. 渗流自由面确定方法的探讨[J]. 山东水利,2009(6):27-28.
- [6] 孙伟建,侯兴民,李远东,等.基于虚单元法求解渗流自由面的曲线拟合法[J].水力发电,2016,42(11):50-53+67.
- [7]关明芳,陈洪凯.渗流自由面求解方法综述[J].重庆交通学院学报,2005,24(5):68-73.
- [8] NEUMANN S P. Saturated unsaturated seepage by finite elements[J]. Journal of the Hydraulics Division, 1973, 99 (12):2233 – 2250.
- [9] 付延玲,周志芳,武永霞.改进复合单元渗透矩阵调整法 求解自由面三维渗流场[J]. 岩土工程学报,2009,31
 (9):1434-1439.
- [10] 唐红影. 基于改进弃单元法的渗流自由面计算[J]. 水

电能源科学,2016,34(11):113-115+112.

- [11] DARBANDI M, TORABI S O, SAADAT M, et al. A moving-mesh finite-volume method to solve free-surface seepage problem in arbitrary geometries [J]. International Journal for Numerical & Analytical Methods in Geomechanics, 2010, 31(14):1609-1629.
- [12] CHUGH A K, FALVEY H T. Seepage analysis in a zoned anisotropic medium by the boundary element method [J]. International Journal for Numerical & Analytical Methods in Geomechanics, 2010, 8(4):399 - 407.
- [13] ZHENG Hong, LIU Feng, LI Chunguang. Primal mixed solution to unconfined seepage flow in porous media with numerical manifold method [J]. Applied Mathematical Modelling, 2015, 39(2):794-808.
- [14] ZHANG Wei, DAI Beibing, LIU Zhen, et al. Unconfined seepage analysis using moving Kriging mesh-free method with Monte Carlo integration [J]. Transport in Porous Media, 2017, 116(1): 163 - 180.
- [15] DAI Qianwei, LEI Yi, ZHANG Bin, et al. A practical adaptive moving-mesh algorithm for solving unconfined seepage problem with Galerkin finite element method[J]. Scientific Reports, 2019, 9(1):6988.
- [16] 欧阳君,林飞,刘秋英,等. 基于 ABAQUS 的土石坝稳 定渗流期应力应变分析[J].水资源与水工程学报, 2012,23(2):104-108.
- [17] KAZEMZADEH PARSI M J, DANESHMAND F. Unconfined seepage analysis in earth dams using smoothed fixed grid finite element method[J]. International Journal for Numerical & Analytical Methods in Geomechanics, 2012, 36(6):780-797.
- [18] BARDET J P, TOBITA T. A practical method for solving free-surface seepage problems[J]. Computers & Geotechnics, 2002, 29(6):451-475.
- [19] ODEN J T, KIKUCHI N. Theory of variational inequalities with applications to problems of flow through porous media[J]. International Journal of Engineering Science, 1980, 18(10):1173-1284.
- [20] LACY S J, PREVOST J H. Flow through porous media: A procedure for locating the free surface [J]. International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics, 1987, 11(6):585-601.
- [21] YANG Yongtao, SUN Guanhua, ZHENG Hong. Modeling unconfined seepage flow in soil – rock mixtures using the numerical manifold method[J]. Engineering Analysis with Boundary Elements, 2019, 108(11):60 – 70.