

受压圆孔板的闭合裂纹尖端应力强度因子解析解

彭绍驰, 经来旺, 吴迪, 经纬

(安徽理工大学 土木建筑学院, 安徽 淮南 232001)

摘要: 研究多应力场相互作用下的裂纹尖端应力强度因子是断裂力学中的重要内容, 探究压缩荷载下圆孔与裂纹相互作用下的裂纹尖端应力强度因子对受压材料断裂准则与强度的影响至关重要。在含圆孔板单轴压缩初始解的基础上, 采用叠加原理推导得出了单轴压缩圆孔板的裂纹尖端应力强度因子积分方程, 采用切比雪夫多项式推导得出了积分方程的近似解; 运用有限元方法对同一问题进行分析, 并与积分方程的近似解进行对比; 分析了圆孔尺寸、裂纹尺寸、裂纹位置以及裂纹面摩擦系数对裂纹尖端应力强度因子的影响。结果表明: 通过叠加原理得出的裂纹尖端应力强度因子解与有限元方法解基本吻合, 证明了基于初始解与叠加原理得出的裂纹尖端应力强度因子积分方程的正确性; 更大的裂纹尺寸和圆孔尺寸、与孔边更近的位置以及更小的裂纹面摩擦系数会造成更大的应力强度因子, 同时, 靠近孔边侧的裂纹应力强度因子波动相较于远离孔边侧更为明显。

关键词: 压缩圆孔板; 闭合裂纹; 摩擦接触; 应力强度因子; 叠加原理; 切比雪夫多项式

中图分类号: O346.1; TV16

文献标识码: A

文章编号: 1672-643X(2022)06-0159-08

Analytical solution of stress intensity factor for closed crack in compression circular hole plate

PENG Shaochi, JING Laiwang, WU Di, JING Wei

(School of Civil Engineering and Architecture, Anhui University of Science and Technology, Huainan 232001, China)

Abstract: The study of the stress intensity factor at the crack tip under the interaction of multiple stress fields is an important part of fracture mechanics, the understanding of which is critical to the fracture criterion and strength analysis of compressed materials. On the basis of the initial solution of uniaxial compression of circular hole plate, the crack tip stress intensity factor integral equation of circular hole plate under uniaxial compression is derived by superposition principle, and the approximate solution of the integral equation is derived by Chebyshev polynomial. Then, the same problem is analyzed by finite element method, and the solution is compared with the approximate solution of the integral equation. Meanwhile, the effects of circular hole size, crack size, crack location and crack surface friction coefficient on the stress intensity factor at the crack tip are analyzed. The results show that the solution of the stress intensity factor at the crack tip obtained by the superposition principle is basically consistent with that of the finite element method, so the integral equation based on the initial solution and the superposition principle is proven correct. Larger crack size and circular hole size, closer to the hole edge and smaller crack surface friction coefficient all lead to greater stress intensity factors. Furthermore, the fluctuation of the crack stress intensity factor close to the hole edge is more obvious than that far away from the hole edge.

Key words: compression circular hole plate; closed crack; frictional contact; stress intensity factor; superposition principle; Chebyshev polynomial

收稿日期: 2022-07-05; 修回日期: 2022-09-26

基金项目: 国家自然科学基金项目(51904012)

作者简介: 彭绍驰(1998-), 男, 安徽安庆人, 硕士研究生, 研究方向为线弹性断裂力学。

通讯作者: 经来旺(1964-), 男, 江苏南京人, 博士, 教授, 博士生导师, 研究方向为地下工程结构优化。

1 研究背景

自然界中的材料内部均存在微裂纹与微孔洞的固有缺陷,在外部荷载的作用下,这些微裂纹逐步发展为大裂纹,对材料的宏观性能与破坏特征有着重大的影响。针对材料内部而言,这些孔洞的存在可能会对裂纹尖端应力强度因子产生影响^[1-6]。应力强度因子计算的准确与否直接影响对微裂纹扩展形式的判断以及对材料宏观性能的评估。因此,准确地计算受孔洞影响的裂纹尖端应力强度因子有着重要的工程价值。

无限大板中的孔洞与裂纹相互作用属于多连通域研究领域,起初,学者们以格林函数法和洛朗级数展开法对这一问题进行研究,随着这一领域研究的不断深入,位移不连续法、位错密度法、边界积分法^[7-10]等相继出现,如 Yi 等^[10]通过叠加原理提出了多个孔与裂纹在远场应力与表面应力作用下的应力强度因子计算公式。这些研究为孔隙耦合下的应力强度因子计算提供了重要参考依据,但这些研究多基于远场拉应力状态,没有考虑到裂纹面的摩擦作用。在闭合裂纹计算方面,王强胜等^[11]采用分布位错法研究了表面裂纹的应力强度因子计算方法;郑安兴等^[12]采用互补理论研究了摩擦系数对裂纹尖端应力强度因子的影响。

在试验研究方面,杨恩光等^[13]利用有机玻璃板制备了闭合裂纹试件,并采用数字图像系统探究了裂纹的扩展规律;李立等^[14]采用超声波技术分析了裂纹方向和摩擦系数对应力强度因子的影响。声发射试验^[15-16]和光弹性试验^[17]也相继被应用于闭合裂纹研究。数值仿真研究^[18-23]也取得了一定的进展,如申伟等^[23]采用 ANSYS 对钢板裂纹进行了数值模拟,探究了闭合裂纹长度与宏观缺陷敏感性的关系。上述研究对闭合型裂纹的参数标定提供了思路,但裂纹所在应力场较为单一,没有考虑到其他缺陷对裂纹的影响。针对这一不足,考虑了圆孔对裂纹应力场的作用,并在此基础上探究了裂纹位置和裂纹方向对其应力强度因子的影响。

为了精准计算受圆孔作用的闭合裂纹尖端应力强度因子,首先基于叠加原理与初始解推导出应力强度因子的积分解;然后采用切比雪夫多项式在裂纹面布置离散点,得到应力强度因子的近似解,并采用有限元方法进行实例验证,证明该方法的正确性;最后根据近似解计算公式分析了圆孔半径、裂纹位置、裂纹倾角、裂纹长度以及裂纹面摩擦系数对应

力强度因子的影响。本研究成果可为压缩荷载作用下裂纹的扩展形式、材料失效准则以及宏观性能评估提供参考依据。

2 应力强度因子求解

2.1 叠加原理与初始解

计算由外部荷载引起的裂纹尖端应力强度因子,可以通过考虑无外部荷载作用但有裂纹表面承受面力的问题进行解决,该面力与无裂纹几何体在外部荷载作用下裂纹所在位置处产生的应力大小相等、方向相反。图 1 为叠加原理示意图。

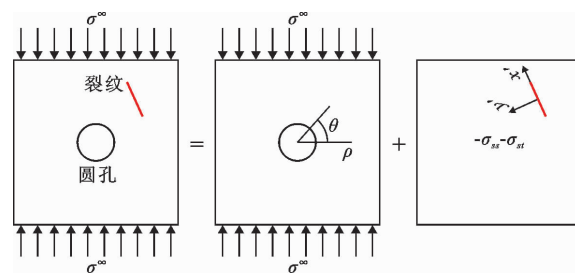


图 1 叠加原理示意图

图 1 中: σ 为远场应力, MPa; σ_{ss} 为外荷载在裂纹面处产生的垂直于裂纹面的正应力, MPa; σ_{sl} 为外荷载在裂纹面处产生的平行于裂纹面的正应力, MPa。

如图 1 所示的叠加原理,一个无限大板内含有单个圆孔和裂纹,在单轴压缩状态下的裂纹尖端应力强度因子计算可以等效为:含有一个圆孔的无限大板受到单轴压缩荷载作用与含有一个裂纹的无限大板受到裂纹面力作用的叠加,同时为了方便计算,在圆孔圆心处建立如图 1 所示的极坐标,在裂纹中心处建立局部直角坐标。裂纹所受面力大小与无裂纹结构所受应力大小相等,即:

$$\begin{cases} \sigma_\rho = -\frac{\sigma_\infty}{2} \left[1 - \frac{R^2}{\rho^2} - \left(1 - \frac{4R^2}{\rho^2} + \frac{3R^4}{\rho^4} \right) \cos(2\theta) \right] \\ \sigma_\theta = -\frac{\sigma_\infty}{2} \left[1 + \frac{R^2}{\rho^2} + \left(1 + \frac{3R^4}{\rho^4} \right) \cos(2\theta) \right] \\ \tau_{\theta\rho} = -\frac{\sigma_\infty}{2} \left(1 + \frac{2R^2}{\rho^2} - \frac{3R^4}{\rho^4} \right) \sin(2\theta) \end{cases} \quad (1)$$

式中: σ_ρ 为径向应力, MPa; σ_θ 为周向应力, MPa; $\tau_{\theta\rho}$ 为切向应力, MPa; R 为圆孔半径, mm; ρ 为裂纹点距圆心的径向距离, mm; θ 为裂纹点的倾角, ($^\circ$)。

由于裂纹的局部坐标系采用直角坐标,需要对其进行坐标转换,坐标转换矩阵为:

$$\begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_\rho & \tau_{\theta\rho} \\ \tau_{\theta\rho} & \sigma_\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \quad (2)$$

式中: σ_x 为 x 方向的正应力, MPa; σ_y 为 y 方向的正应力, MPa; τ_{xy} 为剪应力, MPa。

通过公式(2) 得到转换后的应力分量为:

$$\begin{cases} \sigma_x = -\frac{\sigma^\infty R^2}{2\rho^4} [(2\rho^2 - 3R^2)\cos(4\theta) + \rho^2\cos(2\theta)] \\ \sigma_y = -\frac{\sigma^\infty}{2\rho^4} [(3R^4 - 2R^2\rho^2)\cos(4\theta) + 3R^2\rho^2\cos(2\theta) + 2\rho^4] \\ \tau_{xy} = \frac{\sigma^\infty R^2}{2\rho^4} [(3R^2 - 2\rho^2)\sin(4\theta) + \rho^2\sin(2\theta)] \end{cases} \quad (3)$$

由公式(3)构成的应力分量解即为初始解。

2.2 积分解

对于闭合裂纹而言,由于裂纹受压闭合后,一型应力分量的奇异性不复存在,此时的复合型裂纹转化为特殊的纯二型裂纹。图2为裂纹面受力示意图。

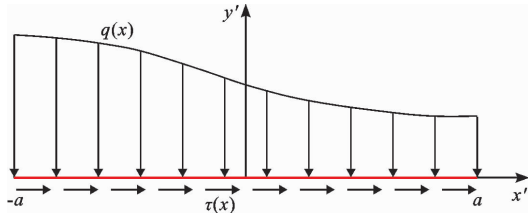


图2 裂纹面受力示意图

图2中: a 为裂纹的半长, mm; $q(x)$ 为裂纹面所受的正应力, MPa; $\tau(x)$ 为裂纹面所受的切应力, MPa。

对于无限大板条件下的纯二型裂纹,其应力场可以运用 Westergaard 应力函数式进行表达,即选取复变函数为:

$$Z_{II} = \frac{\tau_{ef} z}{\sqrt{z^2 - a^2}} \quad (4)$$

其应力分量表达式为:

$$\begin{cases} \sigma_x = 2 \operatorname{Im} Z_{II} + y \operatorname{Re} Z'_{II} \\ \sigma_y = -y \operatorname{Re} Z'_{II} \\ \tau_{xy} = \operatorname{Re} Z_{II} - y \operatorname{Im} Z'_{II} \end{cases} \quad (5)$$

根据叠加原理,此时裂纹除受到裂纹面的“伪力”作用外,不受其他任何力的影响,因此存在边界条件为:

$$|Z| \rightarrow \infty, \quad \sigma_x = \sigma_y = \tau_{xy} = 0 \quad (6)$$

从而得到应力强度因子的计算形式为:

$$K_{II}(\pm) = \frac{\tau_{ef}}{\sqrt{\pi a}} \cdot \frac{a \pm s}{\sqrt{a^2 - s^2}} \quad (7)$$

式中: $K_{II}(\pm)$ 为裂纹两端应力强度因子(负号表示左端,正号表示右端), MPa $\cdot$ mm^{1/2}; τ_{ef} 为裂纹面有效切向应力, MPa; $(s, 0)$ 为裂纹面上的任意点。

根据叠加原理,应力强度因子的计算公式可以表示为积分形式,即:

$$K_{II}(\pm) = \frac{1}{\sqrt{\pi a}} \int_{-a}^a \tau_{ef}(x) \frac{a \pm x}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx \quad (8)$$

从公式(8)可以得知,计算裂纹尖端应力强度因子所需的参数为裂纹半长和有效切向应力,由于裂纹半长是已知参数,故而求解裂纹尖端的应力强度因子关键在于求解裂纹面的有效切向应力。

由于裂纹面发生闭合,裂纹面受到切向应力的同时也受到摩擦作用,所以裂纹面的有效切向应力计算公式为:

$$\tau_{ef} = \tau - \tau_f \quad (9)$$

式中: τ 为裂纹面剪应力, MPa; τ_f 为裂纹面摩擦剪应力, MPa。

裂纹面剪应力可以表示为:

$$\tau = (\sigma_x - \sigma_y) \sin \beta \cos \beta - \tau_{xy} (\cos^2 \beta - \sin^2 \beta) \quad (10)$$

式中: β 为裂纹局部坐标与横坐标的夹角, (°)。

摩擦剪应力可以表示为:

$$\begin{aligned} \tau_f &= u \sigma_n \\ &= u [\sigma_x \sin^2 \beta + \sigma_y \cos^2 \beta - 2\tau_{xy} \cos \beta \sin \beta] \end{aligned} \quad (11)$$

式中: u 为裂纹面摩擦系数; σ_n 为裂纹面正应力, MPa。

结合公式(9)、(10)、(11)可得有效切向应力的计算公式为:

$$\begin{aligned} \tau_{ef} &= (\sigma_x - \sigma_y) \sin \beta \cos \beta - \tau_{xy} (\cos^2 \beta - \sin^2 \beta) - \\ &\quad u [\sigma_x \sin^2 \beta + \sigma_y \cos^2 \beta - 2\tau_{xy} \cos \beta \sin \beta] \end{aligned} \quad (12)$$

由公式(3)、(8)、(12)构成应力强度因子的解称为积分解。

2.3 近似解

由公式(8)可以精准地计算闭合裂纹的应力强度因子,却很难在工程实际中得到应用,原因在于计算公式(8)中的积分难度大,经常出现不可积分状况,为了应力强度因子计算公式能够广泛地应用,本文在公式(8)的基础上,在裂纹面上配置数量为 M 的离散点,其区间长度为 ω^i 。为了更好地控制离散点的数量和位置,令离散点的分布满足切比雪夫多项式,即离散点在局部坐标系中满足:

$$\begin{cases} x_i = a \cos \frac{(2i-1)\pi}{2M} \\ \omega^i = \frac{\pi a}{M} \sin \frac{(2i-1)\pi}{2M} \end{cases} \quad (13)$$

式中: x_i 为离散点在裂纹面局部坐标中的坐标。

联合公式(8)、(13)可得:

$$K_{II}(\pm) = \frac{1}{\sqrt{\pi a}} \sum_{i=1}^M \frac{\tau_{ef}(a \cos \frac{(2i-1)\pi}{2M})(1 \pm \cos \frac{(2i-1)\pi}{2M})}{\sin \frac{(2i-1)\pi}{2M}} \omega^i \quad (14)$$

由于公式(14)采用裂纹面的局部坐标进行计算,相应的有效切向应力也需要进行坐标转换。图3为散点有效切向应力计算示意图。

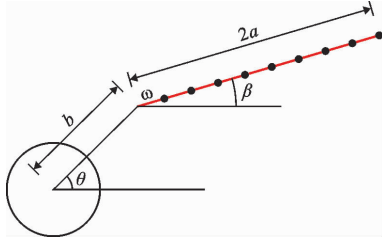


图3 散点有效切向应力计算示意图

图3中: b 为初始点(x_0, y_0)距离圆心的距离, mm; θ 为倾角, ($^\circ$)。

通过图3可知初始点在全局坐标中满足:

$$x_0 = b \cos \theta \quad (15)$$

$$y_0 = b \sin \theta \quad (16)$$

利用初始点(x_0, y_0)可计算出各离散点在全局坐标中的位置为:

$$x^j = x_0 + (a + x_i) \cos \beta \quad (17)$$

$$y^j = y_0 + (a + x_i) \sin \beta \quad (18)$$

式中: (x^j, y^j) 为离散点 x_i 在全局坐标中的位置。

联合公式(12)即可得出局部坐标系对应的有效切向应力为:

$$\tau_{ef}^j = (\sigma_x^j - \sigma_y^j) \sin \beta \cos \beta - \tau_{xy}^j (\cos^2 \beta - \sin^2 \beta) - u [\sigma_x^j \sin^2 \beta + \sigma_y^j \cos^2 \beta - 2\tau_{xy}^j \cos \beta \sin \beta] \quad (19)$$

式中: 上标 j 表示散点(x^j, y^j) 相应的参数; τ_{ef}^j 为离散点对应的有效切向应力, MPa; σ_x^j 为离散点对应的横向应力, MPa; σ_y^j 为离散点对应的竖向应力, MPa; τ_{xy}^j 为离散点对应的剪应力, MPa。

由公式(3)、(14)、(19)构成应力强度因子的解称为近似解。

3 有限元模型实例验证

为了验证由公式(14)计算得出的应力强度因子正确与否,本节采取2种实例对其计算结果进行验证。作为参照,采用ABAQUS有限元中的扩展有限元进行同实例分析。仿真模型如图4所示。

在图4中,设置模型尺寸为100 mm × 100 mm × 3 mm(长 × 高 × 厚)。采用C3D8R单元进行网格划分;约束模型下表面法相位移,在模型上表面施加单

位荷载(1 MPa)。裂纹采用平面部件进行指派,定义通用接触控制裂纹面摩擦作用,采用云图积分方式获取裂纹尖端应力强度因子。

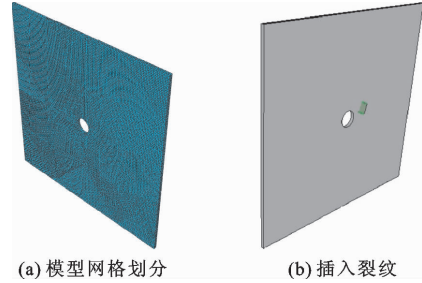


图4 应力强度因子分析有限元仿真模型

3.1 实例1

裂纹延长线过圆心是一种特殊的裂纹分布形式,当裂纹延长线过圆心时,根据公式(1)可分析得出:裂纹面的应力分布只与离散点至圆心的距离相关。分析裂纹延长线过圆心的实例不仅能验证近似解的正确性,也能为后续的应力强度因子影响因素分析提供参考。图5为实例1示意图。

为了获取更多的对比数据,本实例采取3种裂纹半长($a = 2$ mm, $a = 3$ mm, $a = 4$ mm)及7种裂纹倾角的裂纹类型,参数取值分别为: $M = 30$; $R = 5$ mm; $b = 4$ mm; $u = 0$; $\sigma^\infty = 1$ MPa。表1为裂纹按实例1分布时不同裂纹类型下应力强度因子近似解与数值解对比(表中误差是以数值解为基准的相对误差绝对值)。

表1中的对比结果表明,近似解的最大误差不超过6%,说明通过公式(14)计算应力强度因子是可行的。

3.2 实例2

通过实例1可以初步判断公式(14)的正确性,但由于裂纹的特殊分布原因,使得这一判断不具备普遍性,因而本小节继续对裂纹任意分布下的应力强度因子计算进行对比。图6为实例2示意图。同样为了获取更多的对比数据,实例2考虑了3种裂纹半长($a = 2$ mm, $a = 3$ mm, $a = 4$ mm)及8种裂纹倾角的裂纹类型,参数取值分别为: $M = 30$; $R = 5$ mm; $b = 7$ mm; $u = 0$; $\sigma^\infty = 1$ MPa; $\theta = 0^\circ$ 。表2为裂纹按实例2分布时不同裂纹类型下应力强度因子近似解与数值解对比(表中误差是以数值解为基准的相对误差绝对值)。

表 1 实例 1 在不同裂纹类型下应力强度因子近似解与数值解对比

裂纹半长 a/mm	裂纹倾角 $\beta/(^{\circ})$	数值解		近似解			
		$K_{\parallel}(-)$	$K_{\parallel}(+)$	$K_{\parallel}(-)$	误差 /%	$K_{\parallel}(+)$	误差 /%
2	10	0.5761	0.5484	0.5615	2.5343	0.5389	1.8326
	20	1.0883	1.0409	1.0553	3.0323	1.0128	2.6996
	30	1.4748	1.4030	1.4213	3.6325	1.3646	2.7370
	40	1.6745	1.6002	1.6168	3.4458	1.5517	3.0309
	50	1.6758	1.5958	1.6168	3.5207	1.5517	2.7635
	60	1.4737	1.4112	1.4213	3.5557	1.3646	3.3022
	70	1.0959	1.0461	1.0553	3.7047	1.0128	3.1833
3	10	0.7048	0.6543	0.6815	3.3059	0.6407	2.0786
	20	1.3299	1.2407	1.2802	3.7371	1.2042	2.9419
	30	1.8020	1.6762	1.7223	4.4229	1.6224	3.2096
	40	2.0531	1.9091	1.9586	4.6028	1.8450	3.3576
	50	2.0559	1.9131	1.9586	4.7327	1.8450	3.5597
	60	1.8050	1.6858	1.7223	4.5817	1.6224	3.7608
	70	1.3351	1.2509	1.2802	4.1121	1.2402	0.8554
4	10	0.8157	0.7419	0.7799	4.3889	0.7215	2.7496
	20	1.5322	1.4035	1.4640	4.4511	1.3560	3.3843
	30	2.0804	1.8911	1.9710	5.2586	1.8269	3.3948
	40	2.3743	2.1597	2.2404	5.6396	2.0774	3.8107
	50	2.3773	2.1612	2.2404	5.7586	2.0774	3.8775
	60	2.0902	1.9028	1.9710	5.7028	1.8269	3.9889
	70	1.5484	1.4161	1.4640	5.4508	1.3560	4.2441

表 2 实例 2 在不同裂纹类型下应力强度因子近似解与数值解对比

裂纹半长 a/mm	裂纹倾角 $\beta/(^{\circ})$	数值解		近似解			
		$K_{\parallel}(-)$	$K_{\parallel}(+)$	$K_{\parallel}(-)$	误差 /%	$K_{\parallel}(+)$	误差 /%
2	0	0.0068	0.0072	0		0	
	10	0.3869	0.4057	0.3810	1.5249	0.4026	0.7641
	20	0.7398	0.7691	0.7244	2.0816	0.7555	1.7683
	30	1.0143	1.0391	0.9901	2.3859	1.0150	2.3193
	40	1.1754	1.1787	1.1430	2.7565	1.1485	2.5621
	50	1.2014	1.1724	1.1681	2.7718	1.1388	2.8660
	60	1.0846	1.0143	1.0528	2.9320	0.9867	2.7211
3	70	0.8342	0.7318	0.8096	2.9489	0.7105	2.9106
	0	0.0083	0.0093	0		0	
	10	0.4786	0.5049	0.4666	2.5073	0.4976	1.4458
	20	0.9204	0.9578	0.8903	3.2703	0.9344	2.4431
	30	1.2741	1.2923	1.2280	3.6182	1.2563	2.7857
	40	1.4884	1.4624	1.4337	3.6751	1.4224	2.7352
	50	1.5356	1.4582	1.4797	3.6403	1.4103	3.2849
4	60	1.3942	1.2630	1.3447	3.5504	1.2197	3.4283
	70	1.0809	0.9044	1.0438	3.4323	0.8726	3.5161
	0	0.0101	0.0111	0		0	
	10	0.5832	0.5951	0.5495	5.7785	0.5794	2.6382
	20	1.1217	1.1290	1.0528	6.1425	1.0890	3.5430
	30	1.5512	1.5220	1.4640	5.6215	1.4661	3.6728
	40	1.8135	1.7292	1.7228	5.0014	1.6625	3.8573
	50	1.8650	1.7160	1.7831	4.3914	1.6509	3.7937
	60	1.6929	1.4853	1.6271	3.8868	1.4290	3.7905
	70	1.3145	1.0633	1.2655	3.7277	1.0212	3.9594

从表 2 中可以看出,近似解相对数值解的误差较小。另外,当裂纹倾角为零时,近似解更能体现实际的裂纹面有效切向应力分布,这进一步证明了式(14)的正确性。

4 应力强度因子影响因素分析

分析公式(14)与公式(19)可知:裂纹尖端应力强度因子求解与裂纹所处位置的有效切向应力、离散点数量、裂纹长度相关,而裂纹所在位置处的有效切向应力大小与圆孔半径、裂纹位置坐标以及摩擦系数相关。因而为探究应力强度因子的影响因素,本节从圆孔半径、裂纹位置、裂纹倾角、裂纹长度、摩

擦系数以及离散点数量 6 个方面进行分析。图 7 为不同参数对应应力强度因子的影响曲线。

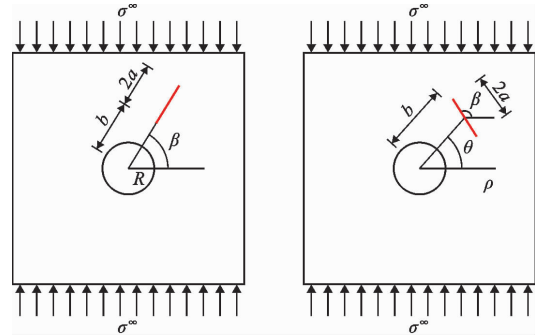


图 5 实例 1 示意图

图 6 实例 2 示意图

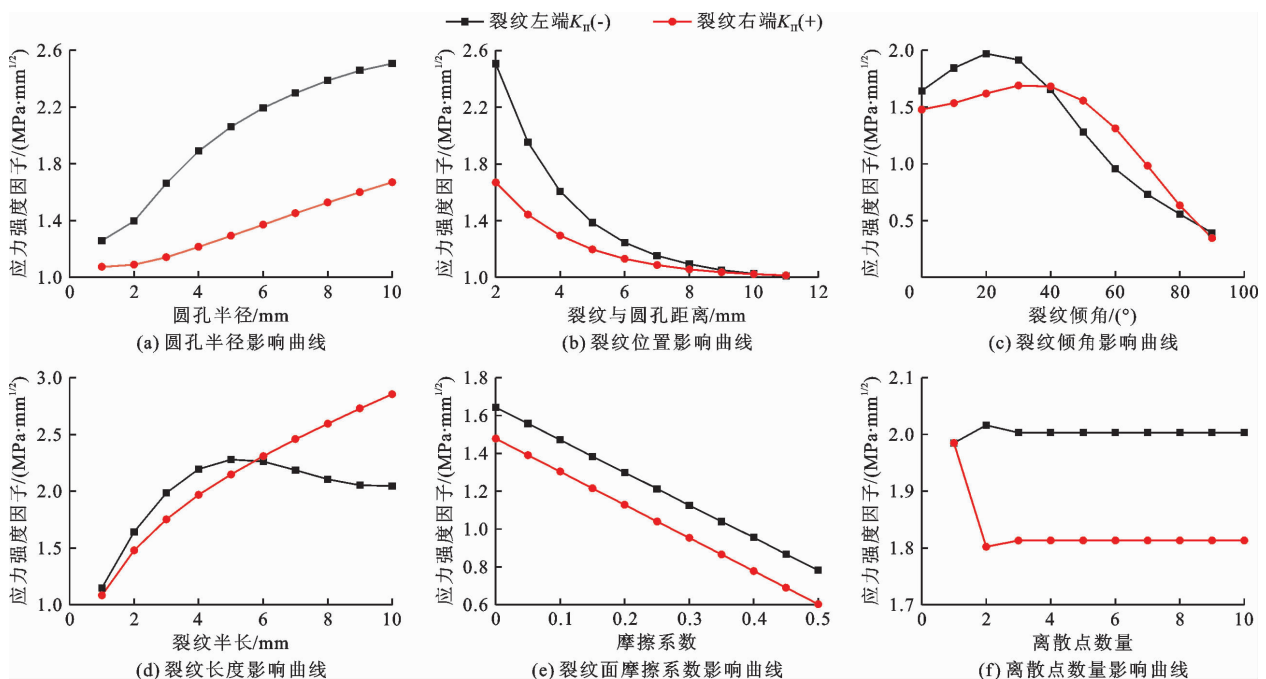


图 7 不同参数对应应力强度因子的影响曲线

(1) 圆孔半径对应应力强度因子的影响。在图 7 (a) 中,裂纹两端的应力强度因子均随着圆孔半径的增大而增大,但不同的是:裂纹右端的应力强度因子基本呈直线增大趋势,裂纹左端的应力强度因子呈抛物线型增大趋势。这是由于圆孔的影响范围有限,裂纹右端远离这一影响范围,所以受到圆孔尺寸的影响较小,而裂纹左端受圆孔影响较大,当圆孔半径越来越大时,裂纹左端应力越靠近孔边应力,所以其强度因子呈抛物线型上升。

(2) 裂纹位置对应应力强度因子的影响。在图 7 (b) 中,裂纹两端的应力强度因子均随着裂纹与圆孔距离的增大而呈抛物线型减小趋势,且裂纹左端的减小趋势较右端更为明显,其原因同样是因为裂纹左端离圆孔更近,受相对尺寸的影响更大。

(3) 裂纹倾角对应应力强度因子的影响。在图 7 (c) 中,随着裂纹倾角的增大,裂纹两端应力强度因子呈先增大后减小的变化规律,裂纹左端应力强度因子峰值点处的夹角明显小于裂纹右端,并且裂纹左端应力强度因子后期的减小幅度在降低,而裂纹右端并没有这一现象的发生。究其原因仍然是因为靠近圆孔侧的裂纹面有效切应力波动明显,而远离圆孔侧的裂纹面有效切应力波动不明显。

(4) 裂纹长度对应应力强度因子的影响。在图 7 (d) 中,随着裂纹长度的增加,裂纹左端应力强度因子先以抛物线型增大后以抛物线型减小,而裂纹右端应力强度因子始终以抛物线型增大。出现这一情况的主要原因在于圆孔位置保持不变,随着裂纹长度的增加,裂纹左端与圆孔的距离先减小后增大,而

裂纹右端与圆孔的距离始终保持增大趋势。

(5) 裂纹面摩擦系数对应力强度因子的影响。在图7(e)中,随着摩擦系数的增大,裂纹左端与裂纹右端的应力强度因子均呈直线下降趋势,这是由于裂纹和圆孔的尺寸与位置均未发生变化,裂纹面有效切向应力只受摩擦系数的影响,将公式(19)对 u 求偏导便可得出直线的斜率 k :

$$k = \frac{\partial \tau_{ef}^j}{\partial u} = \sigma_x^j \sin^2 \beta + \sigma_y^j \cos^2 \beta - 2\tau_{xy}^j \cos \beta \sin \beta \quad (20)$$

(6) 离散点数量对应力强度因子的影响。在图7(f)中,当离散点数量达到3时应力强度因子就十分接近真实解,而数量小于该值时,应力强度因子波动较大,造成较大的计算误差。由于本文探究的是单个圆孔与单个裂纹相互作用下的应力强度因子计算,较少的离散点数量即可获得较高的解,当进行多个圆孔与多个裂纹相互作用的应力强度因子计算时,离散点数量对解的影响将变得至关重要。

5 讨论

本文基于叠加原理和初始解,提出了一种受圆孔作用下的闭合裂纹应力强度因子计算方法,得到裂纹尖端应力强度因子的积分解和近似解。通过两个有限元实例对近似解进行验证,进一步分析了圆孔半径、裂纹位置、裂纹倾角、裂纹长度、裂纹面摩擦系数以及离散点数量对应力强度因子的影响。

从两个有限元实例对比的结果可以看出,本方法能够有效地计算裂纹尖端应力强度因子。在经验公式方面,倪敏等^[24]根据有限元方法拟合得到了计算压缩单裂纹圆孔板的应力强度因子经验公式,相较于该经验公式,本方法计算精度更高,且不受裂纹位置的影响。

从应力强度因子计算公式中可知,应力强度因子受圆孔半径、裂纹位置、裂纹倾角、裂纹长度以及裂纹面摩擦系数等因素的影响,这与祝青钰等^[25]的研究结果相符。于耀庭等^[26]研究发现,应力强度因子随裂纹长度的增加呈非线性变化规律,这与本文方法得到的结果一致,进一步验证了本文提出的应力强度因子计算方法的正确性。

本文所研究的前提是单轴应力状态下单个孔洞对单个裂纹的影响。然而在工程实际中,材料内部含有大量的微孔洞与微裂纹,并且处于多向受载状态,所以针对多孔洞、多裂纹、多向荷载的闭合型裂纹应力强度因子的计算有待进一步研究。

6 结论

(1) 根据初始解和叠加原理,提出了一种闭合型裂纹受圆孔影响下的应力强度因子计算方法。这种方法适用于裂纹面之间存在接触时的裂纹尖端应力强度因子求解。

(2) 通过与数值解的对比,验证了该方法的有效性。同时避免了因应力奇异性与非线性接触造成不可积分的难题,证明了这一方法的应用具有广泛性。

(3) 圆孔尺寸、裂纹尺寸、裂纹位置以及裂纹面摩擦系数均影响裂纹尖端的应力强度因子。归纳可以概括为:更大的裂纹尺寸和圆孔尺寸、与孔边较近的位置以及较小的裂纹面摩擦系数会造成更大的应力强度因子,同时,靠近孔边侧的裂纹应力强度因子波动更为明显。

参考文献:

- [1] 张财贵,曹富,李炼,等. 采用压缩单裂纹圆孔板确定岩石动态起裂、扩展和止裂初度[J]. 力学学报, 2016, 48(3): 624-635.
- [2] 杨开新,陈有亮,蒋明镜,等. 砂岩直接剪切试验三维离散元分析[J]. 水资源与水工程学报, 2020, 31(6): 216-223.
- [3] YUE Zhiwei, YANG Yi, WANG Yibin. Experimental study of crack propagation in polymethyl methacrylate material with double holes under the directional controlled blasting[J]. Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures, 2013, 36(8): 827-833.
- [4] LI Meng, ZHU Zheming, LIU Ruifeng, et al. Study of the effect of empty holes on propagating cracks under blasting loads[J]. International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences, 2018, 103: 186-194.
- [5] 冯国益,肖俊华,苏梦雨. 考虑表面效应时孔边均布径向多裂纹Ⅲ型断裂力学分析[J]. 应用数学和力学, 2020, 41(4): 376-385.
- [6] 倪敏,苟小平,王启智. 压缩双裂纹和单裂纹圆孔板应力强度因子公式[J]. 力学学报, 2013, 45(1): 94-102.
- [7] 葛仁余,曹兵,张金轮. 扩展边界元法研究围压下巴西圆盘应力强度因子[J]. 应用力学学报, 2018, 35(4): 847-853+937.
- [8] 谷岩,张耀明. 双材料界面裂纹复应力强度因子的正则化边界元法[J]. 力学学报, 2021, 53(4): 1049-1058.
- [9] 李聪,牛忠荣,胡宗军,等. 三维切口/裂纹结构的扩展边界元法分析[J]. 力学学报, 2020, 52(5): 1394-1408.
- [10] YI Wei, RAO Qiuhua, LUO San, et al. A new integral equation method for calculating interacting stress intensity

- factor of multiple crack-hole problem[J]. Theoretical and Applied Fracture Mechanics, 2020, 107: 102535.
- [11] 王强胜,李孝滔,咎晓东,等. 分布位错法研究移动赫兹压力作用下次表面裂纹的力学行为[J]. 表面技术, 2019, 48(6): 252–260.
- [12] 郑安兴,罗先启,钱镜林. 基于互补理论和扩展有限元法的摩擦接触裂纹应力强度因子计算[J]. 固体力学学报, 2020, 41(1): 50–58.
- [13] 杨恩光,杨立云,胡恒宁,等. 单轴压缩荷载下闭合裂纹扩展的试验和数值研究[J]. 岩土力学, 2022, 43(S1): 613–622.
- [14] 李立,焦敬品,吴斌,等. 结构中微裂纹与超声波的混频非线性作用数值仿真研究[J]. 计算力学学报, 2018, 35(6): 725–731.
- [15] 张玉良,吴必胜,赵高峰. 基于声发射监测的岩石热损伤实时演化研究[J]. 中南大学学报(自然科学版), 2021, 52(8): 2945–2958.
- [16] LIU Xiaohui, ZHAO Xiaoping, ZHANG Shishu, et al. Research on the failure evolution process of rock mass base on the acoustic emission parameters[J]. Frontiers in Physics, 2021, 9(8): 1–15.
- [17] REN Zhangyu, XIE Huimin, JU Yang. Determination of the stress and strain fields in porous structures by photoelasticity and digital image correlation techniques[J]. Polymer Testing, 2021, 102: 107315.
- [18] ZHANG Peng, DU Chengbin, BIRK C, et al. A scaled boundary finite element method for modelling wing crack propagation problems[J]. Engineering Fracture Mechanics, 2019, 216: 106466.
- [19] YI Cai, WANG Dong, ZHOU Lu, et al. A simulation investigation on the influence of pantograph crack defect on graphite contact strip wear[J]. Engineering Failure Analysis, 2022, 131: 105889.
- [20] WANG Lanwen, SHENG Xuanyu, LUO Jianbin. A peridynamic frictional contact model for contact fatigue crack initiation and propagation[J]. Engineering Fracture Mechanics, 2022, 264: 108338.
- [21] VALVO P S. A physically consistent virtual crack closure technique accounting for contact and interpenetration[J]. Procedia Structural Integrity, 2020, 28: 2350–2369.
- [22] ANKIT A. A sideface traction approach for cohesive and frictional crack growth problems using SBFEM[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2021, 386: 114076.
- [23] 申伟,郑芳彤,李冬生. 钢桥面板疲劳裂纹损伤非线性 Lamb 波检测的数值模拟与试验研究[J]. 土木与环境工程学报(中英文), 2021, 43(3): 135–141.
- [24] 倪敏,苟小平,王启智. 压缩双裂纹和单裂纹圆孔板应力强度因子公式[J]. 力学学报, 2013, 45(1): 94–102.
- [25] 祝青钰,周锐. 椭圆孔边任意长度双裂纹复合型应力强度因子复变函数解[J]. 机械强度, 2019, 41(4): 983–987.
- [26] 于耀庭,何芝仙,陈曦. 基于权函数法的齿根裂纹应力强度因子求解[J]. 机械设计, 2020, 37(9): 71–77.

(上接第 158 页)

- [16] 王露. 大坝施工期温度监测数据关联规则挖掘与预测[D]. 北京:清华大学, 2017.
- [17] 王丹丹. 基于 Apriori 的关联规则挖掘算法的研究[D]. 南京:河海大学, 2018.
- [18] 黄潇霏. 混凝土坝健康状态的实测资料时空诊断方法[D]. 南京:河海大学, 2018.
- [19] 闵恺艺. 基于多测点模型的面板堆石坝沉降变形预测研究[D]. 西安:西安理工大学, 2021.
- [20] 杨晨蕾,包腾飞. 基于 FCM-XGBoost 的大坝变形预测模型[J]. 长江科学院院报, 2021, 38(8): 66–71.
- [21] 徐韧,苏怀智,杨立夫. 基于 GP-XGBoost 的大坝变形预测模型[J]. 水利水电科技进展, 2021, 41(5): 41–46+70.
- [22] 崔佳旭,杨博. 贝叶斯优化方法和应用综述[J]. 软件学报, 2018, 29(10): 3068–3090.
- [23] 杨洋. 贝叶斯优化和关联规则挖掘的若干问题研究[D]. 北京:清华大学, 2020.
- [24] 李亚茹. 面向超参数估计的贝叶斯优化算法研究[D]. 杭州:浙江科技学院, 2021.