

考虑扩散势作用的多离子扩散模型及影响因素分析

田改垒¹, 张志红¹, 陈杨¹, 白顺果²

(1. 北京工业大学 城市与工程安全减灾教育部重点实验室, 北京 100124;

2. 河北农业大学 城乡建设学院, 河北 保定 071001)

摘要: 扩散是成岩作用、溶质在沉积物和地下水中运移等过程中的重要机制。实际工程中主要是多离子共存系统,已有研究忽略了离子带电产生的静电效应对扩散进程的影响,使得各离子间的相互作用在扩散模型中未得到体现。基于经典 Fick 定律,考虑离子间静电效应产生的扩散势作用,借助电中性约束条件,通过推导建立了考虑扩散势作用的多离子扩散模型,采用 COMSOL Multiphysics 有限元软件对多离子的扩散行为开展了数值模拟,重点分析了扩散势影响因素的作用。结果表明:扩散势对阳离子的扩散具有加速作用,对阴离子的扩散具有阻滞效果。当阴离子扩散系数相同时,扩散势对离子的加速作用随阳离子扩散系数的减小逐渐增强。当溶液中阴、阳离子扩散系数均固定时,扩散势对离子的加速作用随离子价位的增加略有提高。

关键词: 多离子溶液; 扩散势; 扩散模型; 多离子运移

中图分类号: TU411.92

文献标识码: A

文章编号: 1672-643X(2019)06-0212-06

Multi-ion diffusion model and its influence factors considering diffusion potential

TIAN Gailei¹, ZHANG Zhihong¹, CHEN Yang¹, BAI Shunguo²

(1. Key Laboratory of Urban Security and Disaster Engineering of Ministry of Education, Beijing University of Technology, Beijing 100124, China; 2. Urban and Rural Construction Institute, Hebei Agricultural University, Baoding 071001, China)

Abstract: Diffusion is an important mechanism for many processes including diagenesis and solute transport in sediments and groundwater. Multi-ion system is common in practical engineering, but the influence of electrostatic effect on diffusion process caused by ion charge has been neglected in previous studies, and the interaction between ions has not been embodied in the diffusion model. In this paper, based on the classical Fick Law, a multi-ion diffusion model considering diffusion potential was proposed by derivation with the aid of electrical neutrality constraint, in which the diffusion potential effect caused by the electrostatic between ions was considered. The finite element software COMSOL Multiphysics was occupied to conduct a series of numerical simulations to determine the influence of diffusion potential. The results showed that the diffusion potential accelerated the diffusion of cations and inhibited the diffusion of anions. When the anionic diffusion coefficients kept the same, the acceleration effect of the diffusion potential on ions increased with the decrease of the cation diffusion coefficient. When the diffusion coefficients of anions and cations in solution were constant, the acceleration effect of diffusion potential on ions movement increased slightly with the increase of ion valence.

Key words: multi-ion solution; diffusion potential; diffusion; multi-ion transport

1 研究背景

扩散控制着水生沉积物、淤泥和黏土等低渗透物质的运移,决定着吸附、解吸动力学以及许多地球化学和生物反应的总速率^[1]。单组分或中性组分

在稀溶液中的扩散通量一般用菲克定律来描述,其中通量与浓度梯度成正比,扩散系数为比例常数。在多离子环境中,需考虑扩散离子的带电特性与周围离子间的相互作用。因此亟需建立同时考虑浓度梯度和扩散势作用的多离子扩散模型,从而更加准

收稿日期:2019-06-10; 修回日期:2019-07-18

基金项目:国家自然科学基金项目(51678012)

作者简介:田改垒(1990-),女,河北邢台人,硕士研究生,研究方向:环境岩土工程。

通讯作者:白顺果(1972-),女,河北保定人,博士,教授,研究方向:农业水土工程。

确地描述实际工程中多离子扩散规律。

在多离子溶液环境中,任一离子扩散均依赖自身的扩散系数,即离子在自扩散过程中扩散系数仅受离子电荷、大小以及离子电导率等离子自身特性参数的影响^[2],但不同离子以不同速率扩散时将导致电荷呈现不平衡发展趋势,所以离子在溶液中的运动受到周围离子拖拽作用而产生电场,也称扩散势,其作用为加速运动速度慢的离子并减缓运动速度快的离子,使溶液中离子聚集在一起,从而确保溶液始终具有局部和整体的电中性^[3-5]。传统的 Fick 定律,仅能描述浓度梯度作用下离子的扩散规律,忽略了电势中多离子静电效应产生的额外质量传递,这种传输过程也被称为电化学迁移或电迁移过程^[5-7]。Lasaga^[8]提出了同时考虑离子浓度梯度和离子间相互作用产生电势作用的扩散通量方程。Rhue^[9]根据不可逆热力学、耦合离子交换作用,运用 Nernst - Planck 方程,将土体电场所对应的电势梯度作为离子的扩散驱动力之一,得到了同时考虑浓度梯度和电位梯度的通量方程。Moyné 等^[10]在化学势的基础上考虑了电势的作用,用电化学势对离子初始势能进行了描述,其中电势由两部分组成,离子之间静电力形成的电势及土壤表面电荷对离子扩散造成影响的电势。Appelo 等^[11-12]运用 NP 模型研究了多种离子共存条件下,离子在对黏土介质中的扩散规律,忽略黏土表面带电作用后,结果表明离子间静电力产生的电势改变了阴阳离子的扩散行为,使得阴阳离子产生了相似的扩散过程。Ben - Yaakov^[6]建立了耦合流扩散模型,考虑扩散势作用造成的扩散过程中离子之间的耦合关系,并开展了多离子的室内扩散试验,基于试验数据通过对扩散系数的反演发现阳离子扩散系数大于无限稀溶液状态下自扩散系数,而阴离子扩散系数小于无限稀溶液状态下自扩散系数。结果表明多离子扩散过程中,离子扩散不仅依赖于自身扩散系数,同时受到周围离子的影响^[13]。Muniruzzaman 等^[14,16]和 Rolle 等^[15]将 NP 模型用于描述运移过程中离子之间的库伦作用,开展了两组不同对流速度下离子的扩散试验,结果表明离子之间的库伦作用在对流为主导地位的二维模型中仍然存在。随后对多离子在非均质多孔介质及饱和多孔介质中的扩散开展了试验研究,并对两种结果进行对比分析。国内对离子间相互作用产生的扩散势研究较少,李仁民等^[17-18]在多离子模型的建立过程中,运用 NP 模型同时考虑浓度梯度和电位梯度,采用 Poisson 方程描述系统中的

电位分布。李学恒^[19]在《土壤化学》著作中对离子之间的耦合作用进行了描述。由于考虑浓度梯度和扩散势作用后的扩散通量方程,未知数大于方程数,需提供约束条件对其进行约束求解。主要约束条件分为两种,提供电中性以及零电流的条件对方程进行求解^[20-22]或采用 Poisson 方程对其中电势梯度未知数进行描述^[5],将 NP 模型进行扩展,建立 Poisson - Nernst - Planck (PNP) 模型。

实际工程中多是多离子共存系统,当溶解物质带电时,需考虑扩散离子与周围离子间的相互作用,采用描述单组分和中性物质 Fick 定律对多离子扩散进行研究将造成离子真实的扩散规律得不到体现,如何准确地揭示多种离子共存体系中离子扩散行为及影响机理一直是环境岩土工程领域研究的热点问题。本文基于 Fick 定律,考虑多离子环境中离子之间的静电效应对离子扩散规律的影响,结合质量平衡方程,建立了多离子静电效应下扩散模型,并对扩散势的影响开展数值计算和分析,揭示了多离子体系在多孔介质中的真实扩散规律。

2 模型建立

多离子在扩散过程中,若阴阳离子以不同的速度进行扩散时,将会导致溶液中电荷趋向不平衡状态,离子之间产生相互约束作用,使得离子聚集在一起保持溶液电中性状态。该离子间的相互作用称为扩散势作用,能够加快扩散过程中运动慢的离子,减慢扩散过程中运动快的离子。理想溶液中考虑扩散势作用,则离子扩散通量表达式为^[8]:

$$J_i = -D_i \nabla c_i - D_i \frac{z_i F}{RT} c_i \nabla \Phi \quad (i = 1, 2, \dots, N) \quad (1)$$

式中: J_i 为离子 i 的扩散通量; D_i 为离子 i 的自扩散系数, m^2/s ; c_i 为离子 i 的浓度; z_i 为离子 i 的价位; F 、 R 、 T 分别为阿伏伽德罗常数、气体常数、温度; Φ 为扩散过程中离子间产生的电势, V ; N 为溶液中离子的种类。

由于扩散通量方程式(1)中未知数大于方程数,为求解电势梯度 $\nabla \Phi$ 表达式,需提供溶液满足电中性的约束条件^[4]进行求解,即:

$$\sum_{i=1}^N z_i J_i = 0 \quad (2)$$

将扩散通量表达式(1)代入公式(2),得到电势梯度表达式为:

$$\nabla \Phi = \frac{-\sum_{i=1}^N (z_i D_i \nabla c_i)}{\sum_{i=1}^N (z_i^2 F D_i c_i) / RT} \quad (3)$$

将公式(3) 代入扩散通量表达式(1) 中, 即可得到多离子扩散通量表达式:

$$J_i = -D_i \nabla c_i + \frac{z_i D_i C_i}{\sum_{k=1}^N (z_k^2 D_k C_k)} \sum_{k=1}^N (z_k D_k \nabla c_k) \quad (4)$$

$(k = 1, 2, \dots, N)$

式中: k 为溶液中离子的种类。

将公式(4) 代入质量平衡方程, 即可得到考虑扩散势作用的多离子扩散模型:

$$\frac{\partial c_i}{\partial t} + \nabla \left(-D_i \nabla c_i + \frac{z_i D_i C_i}{\sum_{k=1}^N (z_k^2 D_k C_k)} \sum_{k=1}^N (z_k D_k \nabla c_k) \right) = 0 \quad (5)$$

3 模型验证

为验证所建模型的正确性和有效性, 采用 Jungnickel 等^[23] 获得的模型数据进行对比分析。Jungnickel 等^[23] 对 NaF 溶液在纯水中的扩散进行了研究, 具体模型如图 1 所示。

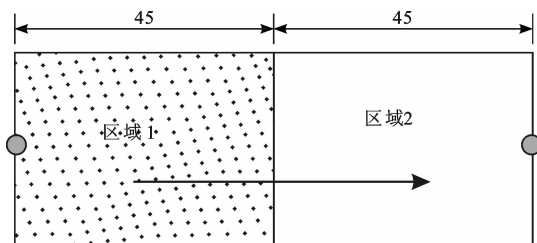


图 1 扩散模型示意图(单位:mm)

模型为两个连通区域的水系统, 系统左侧是浓度为 5.30 mol/m^3 的 NaF, 溶液右侧是纯水, 对 Na^+ 、 F^- 两种离子的扩散进行了研究。结果表明两种不同扩散系数的离子在扩散过程中呈现出相同的浓度分布规律, 两侧浓度随时间和深度分布规律均相同。为保证相同的条件开展数值计算, 模拟条件和模型参数如表 1、2 所示。

表 1 模型初始条件与边界条件

初始条件	上边界条件	下边界条件
$c_i(z, 0) = 0$	$c_i(0, t) = c_{i0}$ ($t \geq 0$)	$c_i(L, t) = 0$ ($t \geq 0$)

图 2 和 3 分别为两区域边界处 Na^+ 、 F^- 浓度随时间的变化曲线和不同扩散时间条件下 Na^+ 、 F^- 浓度变化曲线对比图。图 2 和 3 结果表明: 在相同的

模拟条件下, 所建模型数值模拟结果与 Jungnickel 等^[23] 获得的结果对比有较高的吻合度, 从而验证了本文所建模型的准确性及有效性。

表 2 模型参数取值

Na^+ 扩散系数/ ($\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$)	F^- 扩散系数/ ($\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$)	初始浓度 C_0 / ($\text{mol} \cdot \text{m}^{-3}$)
13.3×10^{-10}	14.7×10^{-10}	5.3

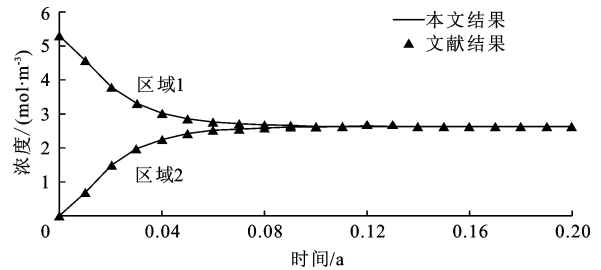


图 2 两区域边界处 Na^+ 、 F^- 浓度随时间的变化曲线

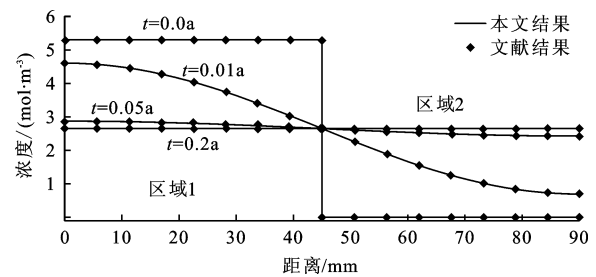


图 3 两区域内 Na^+ 、 F^- 浓度在不同时间下的变化曲线

4 多离子扩散数值模拟

4.1 定解条件及模型参数

数值模拟中初始条件和边界条件如表 3 所示, 各参数值如表 4 所示。表 3 中 c_{i0} 为离子 i ($i = 1, 2, \dots, N$) 的源浓度。所选取的下边界条件为 Cauchy 边界条件, 介于透水与不透水边界之间, 更适用于实际工况^[24]。

表 3 数值模拟模型初始条件与边界条件

初始条件	上边界条件	下边界条件
$c_i(z, 0) = 0$ ($0 \leq z \leq H$)	$c_i(0, t) = c_{i0}$ ($t \geq 0$)	$\lambda \frac{\partial c}{\partial z} + \mu c = 0$ ($t \geq 0$)

4.2 数值模拟结果与分析

多离子扩散过程中, 溶液保持电中性, 离子间相互约束作用产生的扩散势会引起离子扩散规律发生改变。为确定扩散势对离子扩散过程的影响, 选取 NaCl、 ZnCl_2 、 CrCl_3 3 种溶液进行数值模拟, 对离子随

扩散深度的分布和底部浓度累积开展了分析。图 4、5、6 分别为 3 种溶液中阴、阳离子浓度随扩散距离变化曲线的对比结果。

由图 4~6 可知, Na^+ 、 Zn^{2+} 、 Cr^{3+} 、 Cl^- 浓度均随扩散距离的增大呈现逐渐衰减的趋势,在同一扩散深度处离子的积累浓度随扩散时间的延长而不断增大。其中对于阳离子而言考虑扩散势后均出现提前的现象,而 Cl^- 则表现出滞后现象且与对应溶液中阳离子呈现出相同的扩散规律。主要原因是扩散过程中,由于溶液中阴、阳离子扩散速度的不同,将导致溶液中电荷呈现不平衡发展趋势,所以阴、阳离子之间表现出了电耦合效应,也称为扩散势作用,主要功能是减缓运动快的离子、加快运动慢的离子使得溶液中离子聚集,从而维持溶液整体电中性的状态。由于 3 种溶液中阳离子扩散系数均小于阴离子扩散系数,所以扩散势作用对 3 种溶液中阳离子 Na^+ 、 Zn^{2+} 、 Cr^{3+} 产生加速效果,对阴离子 Cl^- 产生减速效果,从而使得溶液中阴、阳离子最终呈现出的相同扩散分布规律。

图 7 为 3 种溶液中阳离子浓度在扩散层底部随时间变化规律的对比结果。由图 7 也可看出,随着扩散时间的增加,底部离子浓度逐渐积累。相同的扩散时间条件下,考虑扩散势作用后底部阳离子的浓度积累量大于未考虑扩散势作用时阳离子的浓度积累量。究其原因,溶液中离子扩散时考虑扩散势作用加速阳离子的扩散,宏观表现为阳离子扩散速度加快,同一时间内到达底部的离子量增大,从而在相同的时间内使得底部离子浓度的积累量较大。

4.2.1 离子价位对扩散势的影响 为明确离子价位对扩散势的影响,将 NaCl 、 ZnCl_2 、 CrCl_3 3 种溶液中阳离子扩散系数均取值为 $13.3 \times 10^{-10} \text{ m}^2/\text{s}$, 阴离子扩散系数取值为 $20.3 \times 10^{-10} \text{ m}^2/\text{s}$,探究 3 种不同污染物溶液中不同价位的阳离子 (Na^+ 、 Zn^{2+} 、 Cr^{3+}) 对扩散势的影响。图 8 和 9 分别表示不同价位阳离子考虑与不考虑扩散势作用离子浓度随扩散距离分布规律对比结果和底部离子浓度随时间变化规律的对比结果。

表 4 数值模拟模型参数及取值

扩散层厚度 L/m	弯曲度 ^[17] τ	初始浓度/ ($\text{mol} \cdot \text{L}^{-1}$)	Na^+ 扩散系数 ^[25] / ($\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$)	Zn^{2+} 扩散系数 ^[25] / ($\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$)	Cr^{3+} 扩散系数 ^[25] / ($\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$)	Cl^- 扩散系数 ^[25] / ($\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$)	边界条件参数 ^[26] λ/m	μ/λ
2	0.6	0.1	13.3×10^{-10}	14.7×10^{-10}	5.97×10^{-10}	20.3×10^{-10}	17.37	50

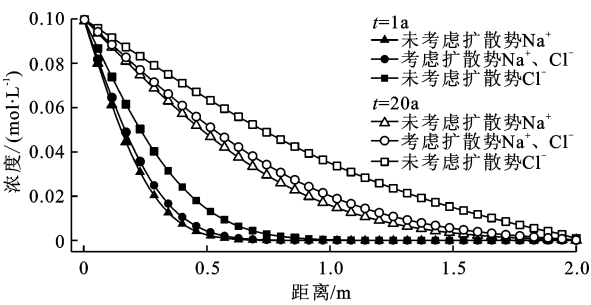


图 4 Na^+ 、 Cl^- 浓度随扩散距离分布规律

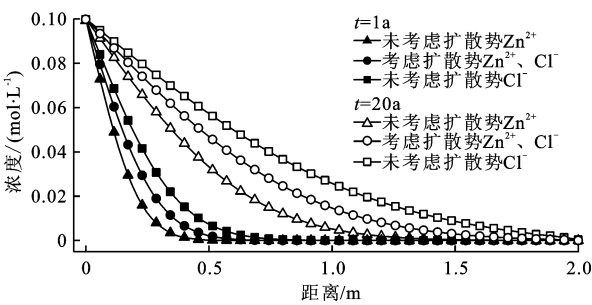


图 5 Zn^{2+} 、 Cl^- 浓度随扩散距离分布规律

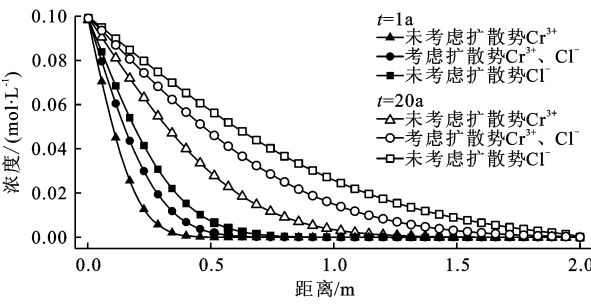


图 6 Cr^{3+} 、 Cl^- 浓度随扩散距离分布规律

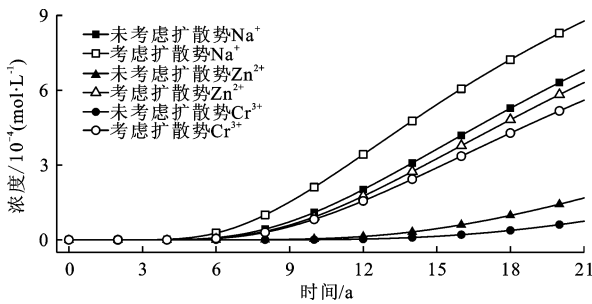


图 7 底部阳离子浓度随时间的变化规律

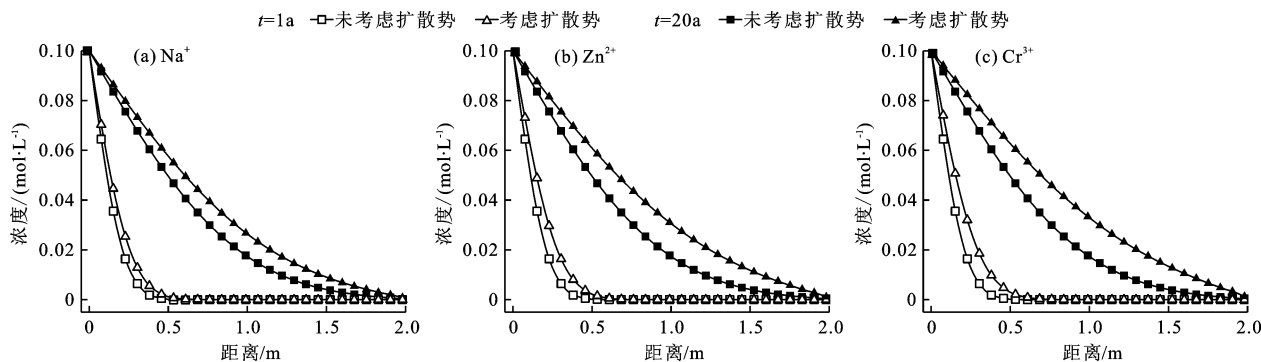


图8 离子浓度随扩散距离分布规律图

由图8可知,当扩散系数相同时,离子浓度随扩散深度分布规律与离子价位相关且表现为不同程度的“提前”现象。究其原因阴离子价位不变,阳离子价位越高,则扩散势项对离子做功越大,增加了扩散驱动力,宏观表现为离子扩散速度的增大,这加快了离子扩散进程,使得同一扩散深度处离子浓度分布曲线超前于未考虑扩散势作用的离子浓度分布曲线。

由图9可以看出,当扩散系数相同时底部离子浓度的积累量随着离子价位的增加逐渐增大。由公式(1)可知扩散势项做功与离子价位成正比,随着离子价位的增大,离子扩散的初始势能也增大,从而加速离子扩散,导致相同的扩散时间内,扩散层底部离子浓度的积累量增大。

4.2.2 扩散系数对扩散势的影响 为分析扩散系数对扩散势的影响,固定溶液中阴、阳离子价位,阳离子价位均取为 $Z_1 = +1$ 、阴离子价位均取为 $Z_2 =$

-1。阴离子扩散系数为 $D_2 = 20.3 \times 10^{-10} \text{ m}^2/\text{s}$,改变阳离子扩散系数 D_1 分别为 $5.97 \times 10^{-10} \text{ m}^2/\text{s}$ 、 $7.13 \times 10^{-10} \text{ m}^2/\text{s}$ 、 $13.30 \times 10^{-10} \text{ m}^2/\text{s}$,研究不同的阳离子扩散系数对离子扩散的影响。图10和11分别为不同扩散系数下考虑与不考虑扩散势作用离子浓度随扩散距离分布规律对比结果和底部离子浓度累积随时间分布规律对比结果。

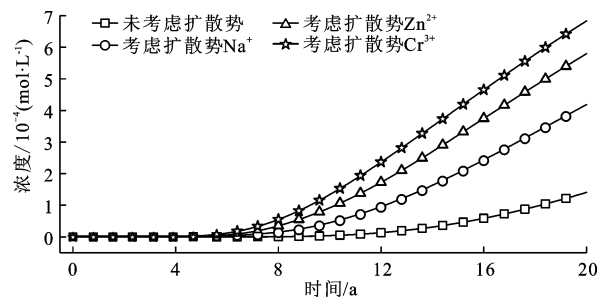


图9 扩散层底部离子浓度随时间的变化规律

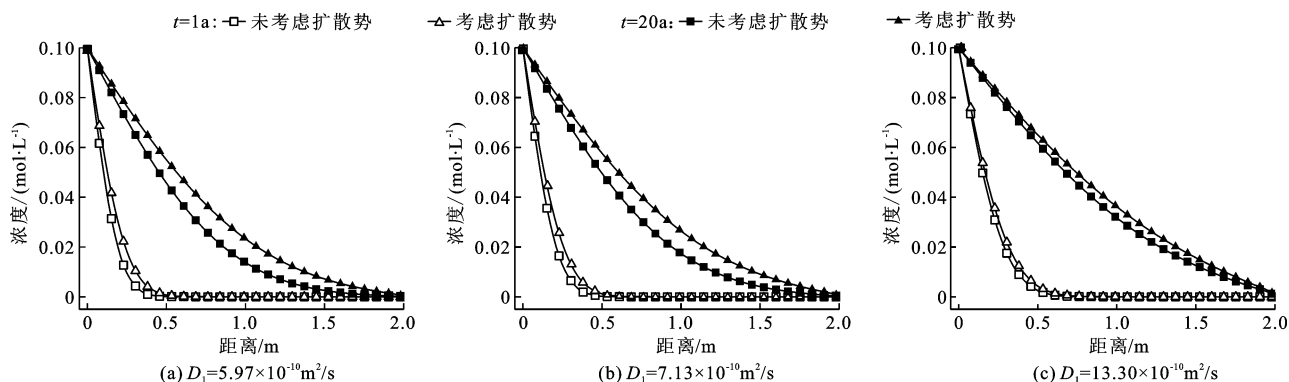


图10 离子浓度随深度分布规律图

由图10可知,当阴、阳离子价位固定时,溶液中离子扩散系数不同,离子浓度随扩散深度分布呈现“提前”现象。主要原因是,溶液中阴离子扩散系数不变,阳离子扩散系数逐渐减小,扩散过程中为保持溶液电中性,对阳离子的加速效果越来越明显,阳离子扩散进程加快更显著,所以呈现出离子浓度分布

随着阳离子扩散系数的减小超前效果逐渐增强。

由图11可知,当溶液中阴阳离子价位固定,阴离子扩散系数不变,扩散层底部离子浓度的积累随着阳离子扩散系数的减小逐渐增加。究其原因阳离子扩散系数越小,扩散势对其加速效果越明显,宏观表现为扩散速度越大,离子到达扩散层底部所需的

时间越小;也可得出在相同的时间内,扩散层底部离子浓度积累量增加逐渐加大。

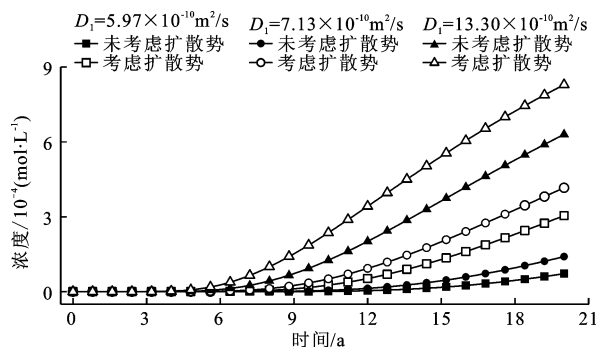


图 11 扩散层底部离子浓度随时间的变化规律

5 结 论

本文基于经典的 Fick 定律,考虑扩散离子与周围离子间相互作用产生的扩散势对离子扩散的影响,并结合质量平衡方程,建立了多离子静电效应下的扩散模型。采用有限元软件 Comsol Multiphysics 进行数值求解,并对静电效应影响因素进行了分析。主要结论如下:

(1) 随着扩散距离的增大,模拟的特征离子浓度逐渐衰减,且所建模型模拟结果表明,考虑扩散势对阳离子的扩散具有加速作用,对阴离子的扩散具有减慢效果。

(2) 当阴离子扩散系数相同时,扩散势对离子的加速作用随着阳离子扩散系数的减小逐渐加强。

(3) 当溶液中阴、阳离子扩散系数均固定时,扩散势对离子的加速作用随着离子价位的增加有小幅度的增强。

(4) 考虑扩散势作用的多离子扩散模型的建立,对各类填埋场及固废堆场服役性能评估及防渗屏障设计具有非常重要的参考价值和指导意义。

参考文献:

- [1] GRATHWOHL P. Diffusion in natural porous media[M]. Springer US, 1998.
- [2] POIRIER D R, GEIGER G H. Mass transfer in fluid systems[M]. Springer International Publishing, 2016.
- [3] APOUNG J B, HAVE P, HOUOT J, et al. Reactive transport in porous media[J]. Mineralogical Society of America Reviews in Mineralogy, 1996, 34(4): 39-41.
- [4] BOUDREAU B P, MEYSMAN F J R, Middelburg J J. Multicomponent ionic diffusion in porewaters: Coulombic effects revisited[J]. Earth & Planetary Science Letters, 2004, 222(2): 653-666.

- [5] JUNGNIKE C, SMITH D, FITYUS S. Coupled multi-ion electrodiffusion analysis for clay soils[J]. Canadian Geotechnical Journal, 2004, 41(2): 287-298.
- [6] BEN - YAAKOV S. Diffusion of seawater ions: Significance and consequences of cross-coupling effects[J]. American Journal of Science, 1981, 281: 974-980.
- [7] RASOULI P, STEEFEL C, MAYER U, et al. Benchmarks for multicomponent diffusion and electrochemical migration[J]. Computational Geosciences, 2015, 19(3): 523-533.
- [8] LASAGA A C. The treatment of multi-component diffusion and ion pairs in diagenetic fluxes[J]. American Journal of Science, 1979, 279(3): 807-818.
- [9] RHUE D. Coupled diffusion of exchangeable cations in soil[J]. Soil Science Society of America Journal, 1992, 56(3): 683.
- [10] MOYNE C, MURAD A M. Electro-chemo-mechanical couplings in swelling clays derived from a micro/macro-homogenization procedure[J]. International Journal of Solids & Structures, 2002, 39(25): 6159-6190.
- [11] APPELO C A J, WERSIN P. Multicomponent diffusion modeling in clay systems with application to the diffusion of tritium, iodide, and sodium in opalinus clay[J]. Environmental Science & Technology, 2007, 41(14): 5002-5007.
- [12] APPELO C A J, LOON L R V, WERSIN P. Multicomponent diffusion of a suite of tracers (HTO, Cl, Br, I, Na, Sr, Cs) in a single sample of opalinus clay[J]. Geochimica Et Cosmochimica Acta, 2010, 74(4): 1210-1219.
- [13] KATZ A, BEN - YAAKOV S. Diffusion of seawater ions, Part II: The role of activity coefficients and ion pairing[J]. Marine Chemistry, 1980, 8(4): 263-280.
- [14] MUNIRUZZAMAN M. Electrostatic interactions during multicomponent ionic transport in porous media[D]. Baden - Württemberg: Eberhard Karls Universität Tübingen, 2017.
- [15] ROLLE M, MUNIRUZZAMAN M, HABERER C M, et al. Coulombic effects in advection-dominated transport of electrolytes in porous media: Multicomponent ionic dispersion[J]. Geochimica et Cosmochimica Acta, 2013, 120: 195-205.
- [16] MUNIRUZZAMAN M, ROLLE M. Impact of multicomponent ionic transport on pH fronts propagation in saturated porous media[J]. Water Resources Research, 2015, 51(8): 6739-6755.
- [17] 李仁民. 粘土中多离子体系的扩散机理及应用研究[D]. 南京: 东南大学, 2010.
- [18] 李仁民, 刘松玉, 缪林昌. 黏土中多离子体系的扩散机理研究[J]. 岩土工程学报, 2010, 32(11): 1794-1799.

(下转第 224 页)

- [9] 申培武, 唐辉明, 汪丁建, 等. 巴东组紫红色泥岩干湿循环崩解特征试验研究[J]. 岩土力学, 2017, 38(7): 1990 – 1998.
- [10] 梁冰, 曹强, 王俊光, 等. 弱崩解性软岩干-湿循环条件下崩解特性试验研究[J]. 中国安全科学学报, 2017, 27(8): 91 – 96.
- [11] 梁越, 孙志伟, 袁野, 等. 干湿循环作用下泥岩颗粒料崩解试验研究[J]. 防灾减灾工程学报, 2018, 38(6): 911 – 917.
- [12] 赵吉霞, 陆传豪, 刘刚才. 紫色母岩在不同酸环境中的崩解分维特征[J]. 水土保持学报, 2017, 31(6): 127 – 133.
- [13] 田巍巍. 干湿循环下不同风化程度泥质粉砂岩崩解特性试验研究[J]. 水资源与水工程学报, 2018, 29(6): 223 – 226.
- [14] IMRE E, LÖRINCZ J, RÓZSA P. Characterization of some sand mixtures[C]//Proceedings of the 12th International Conference of International Association for Computer Methods and Advances in Geomechanics. Goa, India: 2008:2064 – 2075.
- [15] LÖRINCZ J, IMRE E, GÖLOS M, et al. Grading entropy variation due to soil crushing[J]. International Journal of Geomechanics, 2005, 5(4): 311 – 319.
- [16] 王富强, 赵乃立, 袁建平, 等. 基于信息熵原理的东北地区参考作物蒸散量时空特征分析[J]. 水利水电科技进展, 2016, 36(4): 6 – 12.
- [17] 中华人民共和国国土资源部. 岩石物理力学性质试验规程: DZ/T 0276. 9 – 2015 [S]. 北京: 中国标准出版社, 2015.
- [18] 朱训国, 杨庆. 膨胀岩的判别与分类标准[J]. 岩土力学, 2009, 30(S2): 174 – 177.

(上接第 217 页)

- [19] 李学垣. 土壤化学[M]. 北京: 高等教育出版社, 2001.
- [20] NEWMAN J, THOMAS – ALYEA K E. Electrochemical systems[M]. John Wiley & Sons, 2012.
- [21] MUNIRUZZAMAN M, HABERER C, GRATHWOHL P, et al. Coulombic effects and multicomponent ionic dispersion during transport of electrolytes in porous media[C]//EGU General Assembly Conference Abstracts, 2014.
- [22] BOUDREAU B P, MEYSMAN F J R, MIDDELBURG J J. Multicomponent ionic diffusion in porewaters: Coulombic effects revisited[J]. Earth and Planetary Science Letters, 2004, 222(2): 653 – 666.
- [23] JUNGNICHEL C, FITYUS S, SMITH D. Coupled multi-ion electro-diffusion analysis for clay soils[J]. Canadian Geotechnical Journal, 2004, 41(2): 287 – 298.
- [24] 张文杰, 黄依艺, 张改革. 填埋场污染物在有限厚度土层中一维对流-扩散-吸附解析解[J]. 岩土工程学报, 2013, 35(7): 1197 – 1201.
- [25] SHACKELFORD C D, DANIEL D E. Diffusion in saturated soil. I: Background[J]. Journal of Geotechnical Engineering, 1991, 117(3): 467 – 484.
- [26] 王平, 胡伏生, 韩占涛, 等. 咸水通过黏性土层的弥散作用试验研究[J]. 南水北调与水利科技, 2014, 12(1): 101 – 104.