

辐射流立方定理的推导及试验研究

丁林楠, 柴军瑞, 覃源, 许增光

(西安理工大学西北旱区生态水利工程国家重点实验室, 陕西西安710048)

摘要: 为了推导辐射流光滑平行板立方定理并研究其适用性,通过理论分析,根据惯性力和黏性力的数量级关系,将水流的分布状态分成黏性区和势流区,在完全处于黏性区的“弱惯性带”中,由N-S方程和Laplace方程推导辐射流立方定理。在水力压强分别为0.1、0.2和0.3 MPa时,对平行板和规则齿进行水力试验,验证平行板实际流量与立方定理吻合程度以及粗糙裂隙面对于立方定理的适用性。结果表明:水力压强为0.1 MPa时,平行板的流量与立方定理吻合良好;高水头差易产生非线性流,导致流量偏离立方定理;粗糙度的存在会破坏水流的连续性,削弱过流能力,规则齿的试验值比预测值低7.9%~14.6%。

关键词: 岩体裂隙渗流; 辐射流; 光滑平行板; 惯性力; 立方定理

中图分类号: TV139.1

文献标识码: A

文章编号: 1672-643X(2019)03-0242-06

Derivation and experimental study of the cubic law of radial flow

DING Linnan, CHAI Junrui, QIN Yuan, XU Zengguang

(State Key Laboratory Base of Eco-hydraulic Engineering in Northwest Arid Area, Xi'an University of Technology, Xi'an 710048, China)

Abstract: This study aimed at deriving the cubic law of radial flow of smooth parallel plates and study its applicability. According to the order of magnitude relationship between the inertial force and the viscous force, the distribution state of the flow was divided into the viscous zone and the potential flow zone. In the “weak inertial band”, flow was completely in the viscous zone, the cubic law of radial flow was derived according to the N-S equation and the Laplace equation. In hydraulic testing, hydraulic pressures of parallel plates and regular teeth are 0.1, 0.2 and 0.3 MPa, respectively; proving the agreement between the actual flux of the parallel plates and the cubic law and the applicability of rough fracture surface to cubic law. When the hydraulic pressure is 0.1 MPa, the flux of the parallel plates agrees well with the cubic law. However, high head differences are prone to nonlinear flows, causing flow to deviate from the cubic law. The presence of roughness will destroy the continuity of the water flow and weaken the discharge capability. The test value of the regular teeth is 7.9% - 14.6% lower than the predicted value.

Key words: seepage flow in fracture; radial flow; smooth parallel plates; inertial force; cubic law

1 研究背景

对于裂隙流的研究,是从长直流光滑平行板的提出开始。著名的立方定理,正是对光滑平行板中水流特性的定性描述。然而,立方定理的适用性存在许多限制条件。例如,隙宽和水力梯度是恒定值,流速梯度与流动方向相垂直^[1]。天然裂隙并不完全满足以上条件,导致实际流速偏离了立方定理的预测值^[2-3]。卢占国等^[4]对实际平行裂隙下的立方

定理进行修正,并根据隙宽和流速划分了线型渗流和非线性渗流。朱红光等^[5]根据粗糙度对水流产生的非线性影响,建立了岩石裂隙非线性几何模型。

许多学者在研究隙宽空间变化的基础上,得到了局部立方定理^[6]。局部立方定理的应用同样存在假设前提,例如结构面的中和面为平面并且每一个局部点都满足立方定理^[7]。然而,由于曲折度的存在使以上条件很难满足。学者们从不同方面探讨了局部立方定理的适用性。对于不对称结构面,有

收稿日期:2018-09-12; 修回日期:2018-12-26

基金项目:国家自然科学基金项目(51679197、51409206); 国家博士后科研流动站科研基金项目(2014M562524XB)

作者简介:丁林楠(1994-),男,陕西西安人,硕士研究生,研究方向为水工结构及岩石裂隙渗流。

通讯作者:柴军瑞(1968-),男,陕西眉县人,博士,教授,博士生导师,主要从事岩土流体力学、水工渗流力学研究。

学者通过限制结构面的几何特征验证局部立方定理的有效性^[8-9]。局部立方定理由 Stokes 方程推导而出,其忽视了惯性力的影响。因此, Alyaarubi 等^[10]认为低惯性力是局部立方定理的适用条件,并根据理论分析和试验将限制条件定为 $Re < 1$ 。Wang Lichun 等^[7]在考虑曲折度、粗糙度和 Re 数的影响下,对局部立方定理进行了修正。Mgaya 等^[11-12]基于深度平均的 Navier - Stokes 方程建立了新的模型,通过该模型得到的数值结果与试验值具有较高的吻合度^[13]。Kishida 等^[14]发明了一种同时包含渗流试验和隙宽测量的试验系统,通过该系统研究了不对称单裂隙结构面的渗流规律。

不论是立方定理还是局部立方定理,以上的研究均集中在长直流方面。研究表明,钢筋混凝土衬砌在高水头作用下,容易产生裂缝,导致围岩直接承受高压水的作用^[15]。其渗流方式不同于长直流,而是由内向外的辐射流。这时的平行板二维模型将不再适用,取而代之的是三维辐射流。Cao Cheng 等^[16]在试验基础上提出了辐射流立方定理的半理论半经验公式。本文进一步研究辐射流,通过理论分析推导辐射流立方定理。根据水力试验,研究立方定理对平行板和规则齿辐射流的适用性。

2 辐射流平行板

本文所讨论的辐射流光滑平行板,由两块光滑、平直的圆形平行板组成,注水孔位于平行板的圆心。水流由中心注水孔向四周均匀扩散。为了与下文的水力试验相匹配,将中心注水孔设置在下试件。几何形状示意图如图 1 所示。

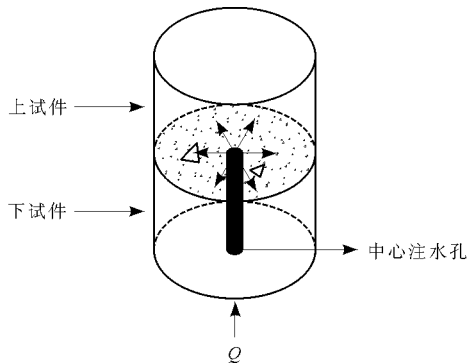


图 1 辐射流光滑平行板几何示意图

2.1 辐射流平行板水流分布特性

对于岩体裂隙而言,流体的运动受 N - S 方程控制(3 组非线性偏微分方程),可以按公式(1)表达^[1]:

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \rho(u \cdot \nabla)u = \rho f - \nabla P + \mu \nabla^2 u \quad (1)$$

式中: u 为速度矢量, m/s ; μ 为流体的动力黏滞系数, $kg/(m \cdot s)$; P 为水压力, Pa ; f 为单位质量力, N ; ρ 为流体的密度, kg/m^3 。N - S 方程描述了流场中流体所受到的惯性力、压力、黏性力和质量力之间的演变关系。N - S 方程本身不闭合,在求解变量(u, P)时,需要配合流体的质量守恒方程共同进行求解,对于不可压缩流体,质量方程为^[7]:

$$\nabla \cdot u = 0 \quad (2)$$

运用 Prandtl 边界层分析法^[17],分析惯性力和黏性力具有相同数量级的黏性区范围,沿流动方向对水流进行受力分析,如图 2 所示。

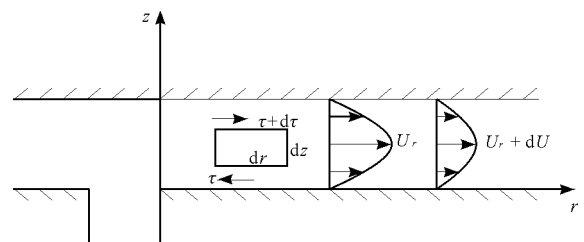


图 2 流动方向上流体的惯性力和黏性力示意图

惯性力大小:

$$\rho dr dz \frac{dU_r}{dt} = \rho dr dz U_r \frac{\partial U_r}{\partial r} \quad (3)$$

黏性力大小:

$$\begin{aligned} \left(\tau + \frac{\partial \tau}{\partial z} dz \right) dr - \tau dr &= \frac{\partial \tau}{\partial z} dz dr \\ &= \mu \frac{\partial^2 U_r}{\partial z^2} dz dr \end{aligned} \quad (4)$$

数量级关系:

$$\text{mag} \left[\rho U_r \frac{\partial U_r}{\partial r} \right] \sim \text{mag} \left[\mu \frac{\partial^2 U_r}{\partial z^2} \right] \quad (5)$$

本文用 δ 表示 z 方向上的特征长度;用辐射范围半径 R 与中心注水孔半径 r_0 的差值 $\Delta r = R - r_0$ 表示 r 方向的特征长度,并称之为净辐射范围;水流沿径向的平均速度 U 为 r 方向的特征速度。将以上特征值代入公式(5),可得:

$$\text{mag} \left[\rho U_r \frac{\partial U_r}{\partial r} \right] \approx \rho \frac{U^2}{\Delta r}, \text{mag} \left[\mu \frac{\partial^2 U_r}{\partial z^2} \right] \approx \mu \frac{U}{\delta^2} \quad (6)$$

对于饱和裂隙流而言,辐射流湿周 $\chi = 2\pi r \times 2$, 过水断面面积 $A = 2\pi r \cdot b$,水力半径 $R = A / \chi = b / 2$ 。 Re 数的特征长度为水力半径的 4 倍,故辐射流的特征长度为隙宽的 2 倍^[18]。

$$Re = \frac{2Ub}{\nu} \quad (7)$$

式中： ν 为流体的运动黏滞系数， m^2/s ； b 为裂隙隙宽， m 。

根据流量守恒原理，辐射流平行板的水流在向外辐射的过程中，流速由内向外逐渐减小。由公式(6)知，惯性力的削弱与流速的二次方成正比，而黏性力的削弱与流速的一次方成正比。随着水流向外流动，惯性力的作用将逐渐被黏性力取代。当入射水流具有较大 Re ，即惯性力较大时，水流呈现出两种状态，惯性力起主导作用的势流区和惯性力、黏性力旗鼓相当的黏性区，本文将这一段距离称为“强惯性带”。辐射过程中水流的流速变化如图3所示。

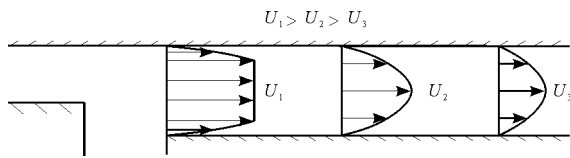


图3 辐射过程中流速分布变化示意图

随着惯性力的削弱，当惯性力相对黏性力可以忽略时，称水流处于“弱惯性带”。

$$\rho \frac{U^2}{\Delta r} \ll \mu \frac{U}{b^2} \quad (8)$$

公式(8)与公式(6)在黏性力的表述方面有所不同，公式(8)中黏性区厚度 δ 由隙宽 b 取代，此时

$$f_r - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial r} + \nu \left(\frac{\partial^2 U_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial U_r}{\partial r} - \frac{U_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial U_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 U_r}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 U_r}{\partial z^2} \right) = \frac{\partial U_r}{\partial t} + U_r \frac{\partial U_r}{\partial r} - \frac{U_\theta^2}{r} + \frac{U_\theta}{r} \frac{\partial U_r}{\partial \theta} + U_z \frac{\partial U_r}{\partial z} \quad (13)$$

根据2.1节关于辐射流平行板水流分布特性的研究，当水流的初始 Re_0 满足公式(9)时，惯性力可以近似忽略。假设满足此条件，对N-S方程简化：

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial r} + \nu \left(-\frac{U_r}{r^2} + \frac{\partial^2 U_r}{\partial z^2} \right) = 0 \quad (14)$$

通过数量级分析法对比分析公式(14)中的黏性力项。隙宽 b 的量级比辐射范围 r 的量级小，而 z 与 b 的量级相同。令 $\phi \ll 1$ ，表示 b 的量级；用1表示 r 和 U_r 的量级。公式(14)中黏性力的两项，量级分别为 $-U_r/r^2 \sim 1/1$ ， $\partial^2 U_r/\partial z^2 \sim 1/\phi^2$ 。为了使 $\partial^2 U_r/\partial z^2$ 的量级为1，运动黏滞系数 ν 的量级必为 ϕ^2 。略去高阶无穷小量后，对流速 U_r 沿隙宽积分，单宽流量 q 与水力传导系数 k 分别为：

$$q = 2 \int_0^{\frac{b}{2}} U_r dz = \frac{b^3}{12\mu} \frac{\partial P}{\partial r} \quad (15)$$

$$k = \frac{gb^2}{12\nu} \quad (16)$$

将 k 值代入公式(12)得辐射流立方定理：

的裂隙流完全处于黏性区。本文用 ε 表示中心注水孔半径 r_0 与辐射范围 R 的比值，并称之为辐射比。为了同时考虑净辐射范围和辐射比的影响，用中心注水孔处的初始 Re_0 判断水流能否进入弱惯性带。

$$Re_0 = \frac{2U_0 b}{\nu} \ll \frac{2}{b} \frac{r}{r_0} \Delta r = \frac{2}{b} \frac{1}{\varepsilon} \Delta r \quad (9)$$

2.2 辐射流立方定理

在辐射流平行板中，当内外水头差恒定时，水流在平行板中形成恒定流。对于不可压缩的恒定渗流，当其渗透系数不存在各向异性时，水头函数满足Laplace方程，其柱坐标下的形式^[19]为：

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial H}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 H}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial z^2} = 0 \quad (10)$$

根据Darcy定理，辐射流平行板上的流量与水头梯度成正比，即：

$$Q = kA \frac{dH}{dr} = 2\pi r b k \frac{dH}{dr} \quad (11)$$

式中： k 为裂隙的水力传导系数。

由公式(10)、(11)得到流量随总水头的变化关系：

$$Q = \frac{2\pi b k \Delta H}{\ln(R/r_0)} \quad (12)$$

通过N-S方程求解水力传导系数 k 。其在柱坐标下的形式^[20]为：

$$Q = \frac{\pi g}{6\nu \ln(R/r_0)} b^3 \Delta H = \frac{\pi g}{6\nu \ln(1/\varepsilon)} b^3 \Delta H \quad (17)$$

3 水力试验

3.1 试验系统

本次试验采用TJXW-600型微机控制岩石节理直剪渗流耦合试验机。该试验机由电液伺服加载系统、多通道闭环测控系统、渗流调控系统等组成，其基本结构示意图和实物图如图4所示。

试验系统可提供法向与切向荷载来模拟实际岩体裂隙的受力情况。法向荷载与切向荷载由静音式伺服油源提供，其最大荷载值均为600kN。试验系统在法向方向上的可控边界条件为常法向应力(CNL)，用来模拟法向应力不变的无支护边坡稳定问题。

力传感器采用轮辐式负荷压力传感器，不同应力下应变片的阻值有所不同，通过测量不同阻值下电压的变化，并通过后续的仪表放大器进行放大来精确测量荷载值，所得荷载示值精确度为 $\pm 1\%$ 。位

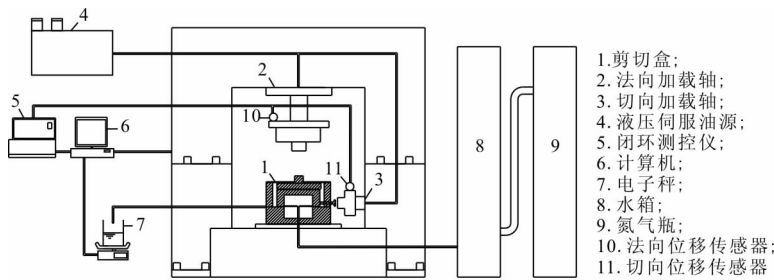
移传感器采用拉线式,将机械位移量转换成可计量的电信号来精确测量位移,切向位移精度为 0.04 mm,法向位移精度为 0.003 mm。渗流增压系统采用气压加压方式,将氮气、水箱及剪切盒有效连接。其最大水压力达 3 MPa,储水量为 10 L。在出水口的集水计量装置处设置流量测量装置,可精确测量不同水压下的流量,流量示值精确度为 $\pm 0.1\%$ 。Multi-05 全数字多通道闭环测控仪采用先进的自适应 PID 算法,使系统参数的控制量得到线精度的闭环控制,从而实现等速加载卸载、恒定法向力、恒定法向位移等功能。密封剪切盒由上、下两部分组成,下试件固定并钻有中心注水孔,上试件与加载器

直接接触,可发生移动。渗水从下试件中心注水孔注入,向四周流动。

3.2 试件及试验方案

立方定理建立在理想的光滑平行板结构,而天然裂隙的轮廓线并非平直、光滑。为了验证立方定理的适用性,制作了光滑平行板和规则齿两种试件。试件用石膏材料和水按质量比为 4:1 搅拌均匀后,注入特定模具中,等试件凝固硬化后脱模。中心注水孔半径为 4 mm,辐射范围 $R = 100$ mm。试件如图 5 所示。

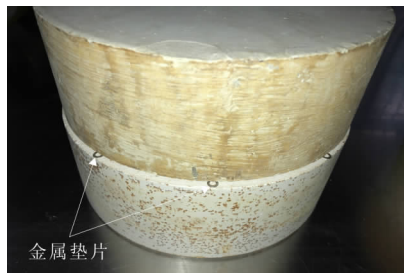
由于 TJXW-600 试验机不具有测量初始隙宽的功能,在试件之间放置 0.3 mm 厚度的金属垫片充当初始隙宽,利用线性变位计(LVDT)获取隙宽值的变化。



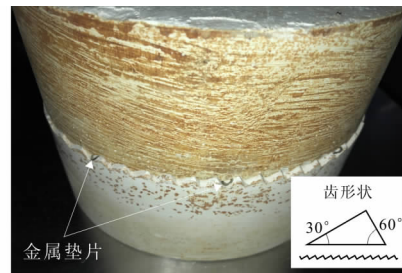
(a) 直剪渗流耦合试验机结构示意图

(b) 直剪渗流耦合试验机实物图

图 4 TJXW-600 型微机控制岩石节理直剪渗流耦合试验机



(a) 光滑平行板试件



(b) 规则齿试件

图 5 试验试件实物图

光滑平行板用来验证光滑、平行状态下立方定理与实际过流能力的吻合程度;规则齿用来研究立方定理对于粗糙裂隙面的适用性。对光滑平行板和规则齿分别在 0.1、0.2 和 0.4 MPa 水压下进行水力试验,试验方案如表 1 所示。

表 1 水力试验方案

方案	试件种类	水力压强 P /MPa
C1	光滑平行板	0.1
C2	规则齿	0.1
D1	光滑平行板	0.2
D2	规则齿	0.2
E1	光滑平行板	0.4
E2	规则齿	0.4

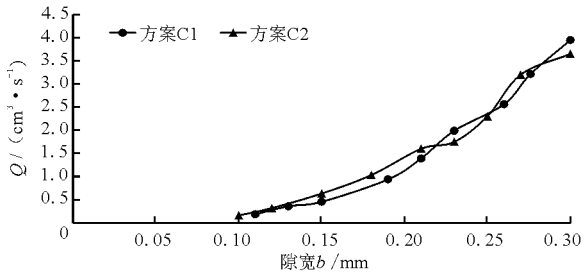
3.3 试验结果及分析

不同方案流量随隙宽的演变如图 6 所示。水力压强为 0.1 MPa 时,平行板和规则齿的流量基本相同。随着水力压强的增大,规则齿的流量将小于平行板的流量。在初始隙宽 0.3 mm 处,相比于平行板,规则齿的流量在水力压强为 0.2、0.4 MPa 时分别减小 7.9%、14.6%。6 种试验方案在单位水头下流量 $Q/\Delta H$ 随隙宽的演变,如图 7 所示。在 0.1 MPa 水力压强下,平行板的流量与立方定理吻合良好,规则齿的流量略小于平行板。随着水力压强的增大,实际流量将小于预测流量。水力压强为 0.2、0.4 MPa 时,平行板的流量平均比立方定理分别小 28.9%、32.9%。

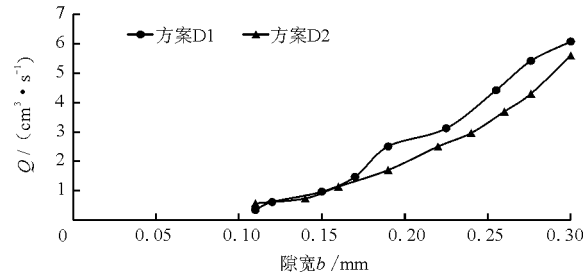
以上结果表明,粗糙度和水力压强的增大,都会使水流偏离线性 Darcy 流,表现出非线性流特性。用 Forchheimer 公式^[19]表述(公式(18)),非线性流的出现使相同水力梯度(J)下的流速(v)减小,从而导致流量相对预测值下降。

$$J = av + bv^m \tag{18}$$

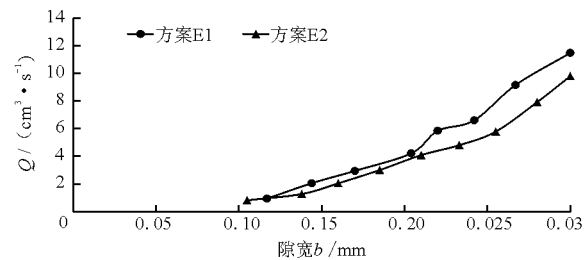
式中: a 、 b 为常数,与水力传导系数相关; m 与流态相关, $m = 1$ 属于层流渗流, $m = 1 \sim 2$ 为过渡区渗流, $m = 2$ 属于粗糙区渗流。



(a) 0.1MPa下流量随隙宽的演变



(b) 0.2MPa下流量随隙宽的演变



(c) 0.4MPa下流量随隙宽的演变

图6 各试验方案下流量随隙宽的演变

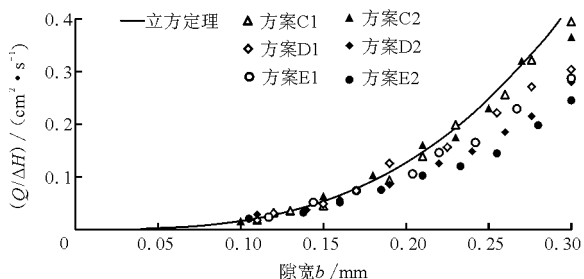


图7 单位水头下流量随隙宽的演变

根据上文对立方定律的推导,其初始 Re_0 需满足公式(9)。在水力试验中,隙宽从0.3 mm 逐渐减小,初始隙宽0.3 mm 对应 Re_0 的边界限制条件。将立方定律和初始隙宽代入公式(9),得到水头的限

制条件 4.732 m。而在水力试验结果中,水力压强为0.1 MPa(约10 m 水头)时,平行板流量依然满足立方定律,表明通过公式(9)判断平行板是否满足立方定律偏于安全。

4 结论

本文通过理论分析推导了辐射流光滑平行板下的立方定律,并进行水力试验研究和总结其适用性。

(1)根据对辐射流立方定律的理论推导,将其适用性总结为:裂隙结构面满足光滑平行板结构;裂隙流属于线性 Darcy 流;水流在辐射过程中,可以进入忽略惯性力的弱惯性带。

(2)立方定律可以准确预测光滑平行板的流量。但是,高水头差会造成非线性水流的产生,导致流量偏离立方定律。通过公式(9)初始 Re_0 的限制条件,可以判断水流是否满足线性流,从而满足立方定律。由水力试验结果知,该公式偏于安全。

(3)粗糙度的存在会破坏水流的连续性,从而削弱裂隙面的过流能力。

对于存在粗糙度的裂隙面,可以用立方定律近似估计流量。当精确度要求较高时,则需要对不同粗糙度下的立方定律进行修正。本文并未进一步展开研究,将在后续研究中进行讨论。

参考文献:

- [1] ZIMMERMAN R W. Fluid Flow in Rock Fractures [C]// Proc. 11th Int. Conf. on Computer Methods and Advances in Geomechanics. Turin, Italy: A. A. Balkema Publishers, 2005. 89 - 107.
- [2] LI Bo, LIU Richeng, JIANG Yujing. Influences of hydraulic gradient, surface roughness, intersecting angle, and scale effect on nonlinear flow behavior at single fracture intersections [J]. Journal of Hydrology, 2016, 538 (538): 440 - 453.
- [3] ZHANG Zhenyu, NEMCIK J. Fluid flow regimes and nonlinear flow characteristics in deformable rock fractures [J]. Journal of Hydrology, 2013, 477: 139 - 151.
- [4] 卢占国, 姚 军, 王殿生, 等. 平行裂缝中立方定律修正及临界速度计算 [J]. 实验室研究与探索, 2010, 29 (4): 14 - 16 + 165.
- [5] 朱红光, 易 成, 谢和平, 等. 基于立方定律的岩体裂隙非线性流动几何模型 [J]. 煤炭学报, 2016, 41 (4): 822 - 828.
- [6] ELKHOURY J E, DETWILER R L, AMELI P. Dissolution and Deformation in Fractured Carbonates Caused by Flow of CO₂ - Rich Brine [C]// AGU Fall Meeting. AGU Fall

- Meeting Abstracts, 2011.
- [7] WANG Lichun, CARDENAS M B, SLOTTKE D T, et al. Modification of the Local Cubic Law of fracture flow for weak inertia, tortuosity, and roughness [J]. *Water Resources Research*, 2015, 51(4):2064–2080.
- [8] MALLIKAMAS W, RAJARAM H. An improved two-dimensional depth-integrated flow equation for rough-walled fractures [J]. *Water Resources Research*, 2010, 46(8):3954–3963.
- [9] WANG Lichun, CARDENAS M B. Non-Fickian transport through two-dimensional rough fractures: Assessment and prediction [J]. *Water Resources Research*, 2014, 50(2):871–884.
- [10] ALYAARUBI A H, PAIN C C, GRATTONI C A, et al. Navier-stokes simulations of fluid flow through a rock fracture [J]. *Geophysical Monograph*, 2013, 162:55–64.
- [11] MGAYA P, KISHIDA K, HOSODA T. Fluid flow in measured apertures of a single rock fracture: A depth-averaged model and the local cubic law simulations [J]. *Journal of Inclusion Phenomena & Macroscopic Chemistry*, 2006, 68(1–2):99–108.
- [12] MGAYA P, KISHIDA K, HOSODA T, ET AL. Estimation of flow behavior on rock joints using the depth-averaged flow model [J]. *Journal of Applied Mechanics*, 2004, 7:1013–1021.
- [13] KISHIDA K, MGAYA P, OGURA K, et al. Flow on a single rock fracture in the shear process and the validity of the cubic law examined through experimental results and numerical simulations [J]. *Soils and Foundations*, 2009, 49(4):597–610.
- [14] KISHIDA K, SAWADA A, YASUHARA H, et al. Estimation of fracture flow considering the inhomogeneous structure of single rock fractures [J]. *Soils and Foundations*, 2013, 53(1):105–116.
- [15] 张春生. 混凝土衬砌高压水道的设计准则与岩体高压渗透试验 [J]. *岩石力学与工程学报*, 2009, 28(7):1305–1311.
- [16] CAO Cheng, XU Zengguang, CHAI Junrui et al. Mechanical and hydraulic behaviors in a single fracture with asperities crushed during shear [J]. *International Journal of Geomechanics*, 2018, 18(11):04018148.
- [17] WEINAN E. Boundary Layer Theory and the zero-viscosity limit of the Navier-Stokes Equation [J]. *Acta Mathematica Sinica*, 2000, 16(2):207–218.
- [18] 郭保华, 苏承东. 多级加载下岩石裂隙渗流分段特性试验研究 [J]. *岩石力学与工程学报*, 2012, 31(S2):3787–3794.
- [19] 张志昌. 水力学(下册) [M]. 北京:中国水利水电出版社, 2011.
- [20] KUMAR S, BERGADA J M, WATTON J. Axial piston pump grooved slipper analysis by CFD simulation of three-dimensional NVS equation in cylindrical coordinates [J]. *Computers & Fluids*, 2009, 38(3):648–663.

喜 讯

《水资源与水工程学报》被中国科学引文数据库 (Chinese Science Citation Database, 简称 CSCD) 收录为 2019–2020 年度来源期刊 (核心库); 2008–2019 年连续 12 年被中国科学技术信息研究所评为中国科技论文统计源期刊 (中国科技核心期刊)。