

# 基于尖点突变理论的高层建筑沉降变形预测分析

李常茂, 蒋桂梅, 鞠兴华

(陕西铁路工程职业技术学院, 陕西 渭南 714000)

**摘要:** 为建立一个全面且系统的高层建筑变形预测模型, 本文首先利用卡尔曼滤波对变形数据进行去噪处理, 分离出趋势项和误差项, 再利用 GA-BP 模型和 LS-GM(1,1) 模型对趋势项进行预测, 并通过组合得到趋势项预测值; 其次, 利用马尔科夫链对累计误差序列的进行修正, 进一步提高预测精度; 最后, 利用尖点突变理论对高层建筑的稳定性进行评价, 以验证预测模型的有效性。结果表明: 半参数型卡尔曼滤波具有较好的滤波效果, 且在趋势项的预测过程中, 通过对 BP 神经网络的优化将平均预测精度由 4.02% 提高到了 2.44%, 而优化 GM(1,1) 模型则将平均预测精度由 4.29% 提高到了 2.76%, 说明本文的优化方法切实可行。通过误差修正, 验证样本中的最大相对误差仅为 1.63%, 说明误差修正模型达到了进一步提高预测精度的目的, 尖点突变理论的分析结果与预测结果相符, 均得出高层建筑处于稳定状态, 其后期变形将会持续减弱。

**关键词:** 沉降变形; 尖点突变理论; 卡尔曼滤波; GA-BP 模型; LS-GM(1,1) 模型; 马尔科夫链; 高层建筑

中图分类号: TU196.2

文献标识码: A

文章编号: 1672-643X(2018)04-0224-06

## Prediction analysis of settlement deformation of high rise building based on cusp catastrophe theory

LI Changmao, JIANG Guimei, JU Xinghua

(Shaanxi Railway Institute, Weinan 714000, China)

**Abstract:** To establish a comprehensive and systematic high-rise building deformation prediction model, this paper uses Kalman filter for deformation data denoising, separation of trend and the error term, and then use GA-BP model and LS-GM(1,1) model to predict the trend, and obtain the trend prediction by combination; secondly, the cumulative the error data is corrected using the Markov chain, further improve the prediction accuracy; finally, the cusp catastrophe theory of stability of high-rise buildings are evaluated to verify the validity of prediction model. The results show that the semi parametric Kalman filter has good filtering effect. In the process of forecasting trend, by optimization of the BP neural network, the average prediction accuracy was increased from 4.02% to 2.44%, and the optimization of GM(1,1) model increased the average prediction accuracy from 4.29% to 2.76%, showing that the optimization method in this paper is feasible. Through error correction, the maximum test sample in relative error is only 1.63%, indicating that the error correction model can further improve the prediction accuracy. Catastrophe theory and prediction results were consistent, the high-rise building is in a stable state, and its deformation will continue to be weakend.

**Key words:** settlement deformation; cusp catastrophe theory; Kalman filtering; GA-BP model; LS-GM(1,1) model; Markov chain; high rise building

## 1 研究背景

随着高层建筑的逐步施工, 其主体荷载会逐渐增加, 进而导致建设主体出现不同程度的沉降。沉

降变形对建筑结构的稳定性具有较大的影响, 尤其是不均匀沉降的危害性更大, 为保证建筑物施工过程中的安全及后期运行的稳定, 有必要对高层建筑的沉降监测及变形进行预测研究<sup>[1]</sup>。

收稿日期: 2018-01-16; 修回日期: 2018-03-28

基金项目: 陕西省教育厅专项科研项目(15JK1169)

作者简介: 李常茂(1982-), 男, 甘肃岷县人, 硕士, 讲师, 主要从事施工与项目管理研究。

在高层建筑的变形预测研究中,相关学者也取得了一定的研究成果,如朱军桃等<sup>[2]</sup>利用傅里叶时频分析法对建筑物的沉降进行预测,有效克服了时间序列自回归模型的不足,实例检验其预测精度较高;高宁等<sup>[3]</sup>则将串联和并联的组合预测模型引入到高层建筑的变形预测中,探讨组合预测模型在高层建筑中的适用性,利用实例检验得出组合模型的预测精度要优于单一预测模型的预测精度。但上述研究在高层建筑的变形预测中的方法探讨较少,未形成系统的预测模型,仍需进一步进行研究,且变形监测数据含有一定的误差信息,对预测具有一定的影响,有必要对其进行去噪处理,而卡尔曼滤波具有较好的去噪效果<sup>[4]</sup>。

因此,本文将BP神经网络和灰色模型引入到高层建筑的变形预测中,但上述两种方法的传统预测具有一定的局限性,需要进行优化,如李彦杰等<sup>[5]</sup>、任丽芳等<sup>[6]</sup>利用遗传算法对BP神经网络进行优化,主要是对其阈值参数等进行优化,经过相关实例检验,有效的克服了BP神经网络易陷入局部最优值及收敛速度慢等问题,并有效的提高了预测精度;何亚伯等<sup>[7]</sup>、李志伟等<sup>[8]</sup>则以灰色GM(1,1)模型为基础,建立了时间序列的非等距预测模型,并利用最小二乘法对其初始值进行优化,实例检验得到该模型具有较好的预测精度,适用性强。

另外,在上述高层建筑的研究成果中,也缺少对高层建筑的稳定性研究,而尖点突变理论能根据变形数据对评价目标进行稳定性评价<sup>[9-11]</sup>,因此,将其引入到高层建筑的稳定性评价中,并将评价结果与预测结果对比,验证其准确性。

综合上述,本文将卡尔曼滤波、GA-BP模型、LS-GM(1,1)模型和马尔科夫链理论进行综合,建立一种全面且系统的高层建筑变形预测的复合模型,再利用尖点突变理论对高层建筑的稳定性进行评价,以验证预测结果的准确性及该方法在高层建筑稳定性评价中的适用性。

## 2 模型基本原理

### 2.1 GA-BP模型

BP神经网络是一种已被广泛应用的多层感知模型,具有多层结构,各层之间采用权值相连,并利用正、反向传播过程对权值进行不断优化,以减小预测误差。其中,正向传播过程指的是输入信息由输入层输入,再逐层经隐层和输出层传出,若输入值达到期望要求,则停止训练,将输出值作为预测值;若

输出值达不到期望要求,则进入误差反向传播过程。反向传播过程是一种监督学习过程,常被用于多层感知模型的训练,具体过程是将输出误差值进行反向传递,并在传递过程中,将误差进行分摊,使各神经元均获得一定的误差信息,而该误差信息又作为各节点权重值的修正依据。通过正、反向传播的不断重复,各层节点的权值将会得到不断的优化,直到输出信息满足期望要求。

在BP神经网络的建立过程中,需要对相关结构及训练参数进行设置,即本文选择三层结构建立BP神经网络;隐层节点数为10;学习率设定为0.5;

但传统的BP神经网络具有易陷入局部最优解,遗传算法具有较好的全局寻优能力,能很好的克服BP神经网络的不足,因此,本文以遗传算法对BP神经网络进行优化,构建GA-BP预测模型,优化过程分述如下:

(1)根据实例特点,对遗传算法的相关参数进行设定,并生成初始种群。

(2)对BP神经网络中的适应度进行计算,若计算结果达到终止条件,则利用BP神经网络对遗传算法确定的参数进行局部微调,以进一步提高预测精度;若未达到终止条件,则利用交叉、选择及变异的方式,产生新一代的染色体,并再进行计算和结果判断。

(3)根据根据优化计算得到的参数,利用BP神经网络进行预测,将测试样本与实际监测值进行对比分析。

本文遗传算法主要是对BP神经网络的阈值赋值及初始权值进行优化,有效降低了BP神经网络陷入局部最优解的可能。

### 2.2 LS-GM(1,1)模型

GM(1,1)模型是灰色模型中的常用模型之一,已被广泛应用于岩土领域,传统非等距GM(1,1)模型虽能实现对高层沉降变形的预测,但其系统误差会对预测精度造成一定的影响。为提高预测精度,本文采用最小二乘法对其初始值进行优化,将初始值的优化形式表达为:

$$X^1(t_1) = X^1(t_1) + S \quad (1)$$

式中: $S$ 为初始项修正值。

进一步将预测微分方程表示为:

$$X^{1*}(t_k) = [X^1(t_1) + S - b/a] \cdot e^{-a(t_k-t_1)} + b/a \quad (2)$$

将上式递减还原即可得到预测值,为使预测序列为最优估计序列,根据最小二乘法的基本原理,需要满足如下条件:

$$\min_S \sum_{t_k=t_1}^{t_n} [X^0(t_k) - X^{*0}(t_k)]^2 \quad (3)$$

通过对上式的求导,并结合最小值原理,即可求得 S:

$$S = a_1/b_1 - [X^0(t_0) - a/b] \quad (4)$$

上式中的  $a_1$  和  $b_1$  参数可根据如下公式进行求解:

$$a_1 = \sum_{t_k=t_1}^{t_n} (X^0(t_k) e^{-a(t_k-t_1)}) \quad (5)$$

$$b_1 = (1 - e^a) \cdot (1 - e^{-2na}) / (1 - e^{-2a}) \quad (6)$$

综上所述,本文以最小二乘法优化非等距 GM(1,1)模型的初始值进行优化,构建了 LS - GM(1,1)模型,以期增加灰色的预测精度。

### 2.3 预测结构

本文预测模型具有系统性,综合卡尔曼滤波、GA - BP 模型、LS - GM(1,1)模型和马尔科夫链理论的各自优势,建立了全面系统的复合预测模型,其结构图如图所示。

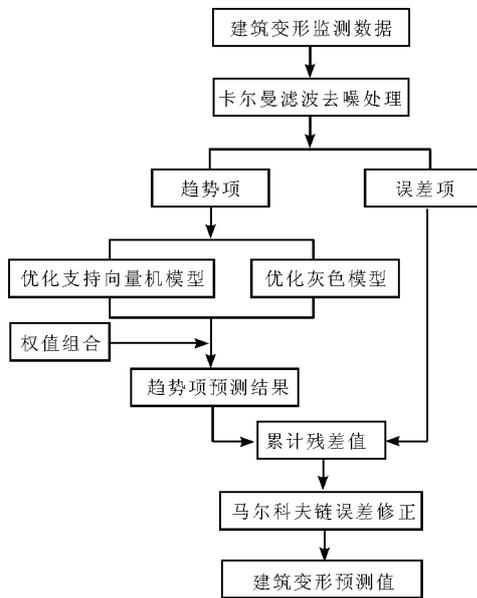


图1 复合预测模型结构图

预测模型的基本预测步骤如下:

(1) 利用卡尔曼滤波对高层建筑的变形数据进行去噪处理,并探讨不同优化方法在滤波过程中的效果,以综合指标确定最优滤波结果,作为趋势项和误差项分离的依据。

(2) 利用 GA - BP 模型和 LS - GM(1,1)模型对趋势项进行预测,并以误差平方和和方差为指标,确定两者的组合权值,综合得到趋势项的最优组合预测结果。

(3) 利用马尔科夫链对滤波及趋势项预测误差

的累计误差序列进行修正预测,以进一步提高预测精度<sup>[14]</sup>。

### 2.4 尖点突变理论

突变分析模型是一种能在连续系统中反映不连续现象的分析方法,具有很好的非线性分析能力。该模型具有 7 种子模型,以尖点突变模型的应用最为广泛。由于尖点突变模型能有效评价物质运动由非平稳状态变化到稳定状态的瞬间过程,因此,对评价高层建筑的稳定性具有一定的价值。

参照相关文献[11]的研究成果,在高层建筑变形尖点突变理论的建立过程中,建立高层建筑变形与时间的四次多项式函数,即:

$$U = a_0 + a_1t + a_2t^2 + a_3t^3 + a_4t^4 \quad (7)$$

式中:  $t$  为变形序列的时间参数;  $a_0, a_1, a_2, a_3, a_4$  为拟合参数。

进一步通过 Tschirhaus 变换将多项式转变为尖点突变模型的标准形式,且在转变过程中,设  $t = x - A, A = a_2 / (4a_4)$ ,则高层建筑的位移函数可转变为:

$$U = b_4x^4 + b_2x^2 + b_1x + b_0 \quad (8)$$

式中:  $b_4, b_2, b_1, b_0$  为拟合参数。

可将公式(7)和公式(8)中的  $a$  与  $b$  的关系表示为:

$$\begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A^4 & -A^3 & A^2 & -A & 1 \\ -4A^4 & 3A^2 & -A & 1 & 0 \\ 6A^2 & -3A & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_4 \\ a_3 \\ a_2 \\ a_1 \\ a_0 \end{bmatrix} \quad (9)$$

在公式(9)两侧同除以  $b_4$  则可得到标准形式为:

$$U = x^4 + \mu x^2 + vx + c \quad (10)$$

$$\mu = \frac{a_2}{a_4} - \frac{3a_3^2}{8a_4^2} \quad (11)$$

$$v = \frac{a_1}{a_4} - \frac{a_2a_3}{2a_4^2} + \frac{a_3^3}{8a_4^3} \quad (12)$$

最后,对突变理论的标准形式进行二次求导,得到控制阈值为:

$$\Delta = 8\mu^3 + 27v^2 \quad (13)$$

根据公式(13),可对高层建筑的变形趋势及稳定性进行判断,即当  $\Delta > 0$  时,说明高层建筑变形趋于减小,处于稳定状态;当  $\Delta < 0$  时,说明高层建筑变形趋于增加,处于不稳定状态。

在尖点利用的应用过程中,从两个阶段来分析高层建筑的稳定性,第 1 阶段是 1 至 9 周期的稳定性分析,而第 2 阶段是 1 至 12 周期的稳定性分析。

### 3 实例分析

#### 3.1 工程概况

为验证本文预测模型的有效性,以某大厦<sup>[15]</sup>的沉降变形数据为基础,进行预测分析。该大厦为双塔楼结构布设,分为 A、B 区,共设计 30 层,浇筑一层的平均时间为 8 d,最大荷载为  $55 \times 10^4$  kN,下覆土体厚度约 50 ~ 60 m,上部以杂填土、粉质黏土为主,下部以粉土、细砂、中粗砂为主,为保证施工过程中的稳定,对各设计观测点进行了周期性的监测,其中 A 区的沉降数据具有较好的代表性,共包含 12 个监测周期,如表 1 所示。

表 1 A 区建筑沉降变形值

监测周期	监测时间/d	沉降值/mm	监测周期	监测时间/d	沉降值/mm
1	24	0.80	7	152	6.55
2	48	2.10	8	176	7.45
3	88	3.75	9	200	8.30
4	104	4.75	10	216	8.70
5	120	5.40	11	232	9.16
6	136	6.00	12	256	9.85

#### 3.2 滤波处理

受环境、人为等因素的影响,监测数据往往含有一定的误差信息,因此本文采用卡尔曼滤波模型对变形数据进行滤波处理,且由于传统卡尔曼滤波模型具有一定的缺陷,本文再将自适应、抗差自适应及半参数法引入到卡尔曼滤波的优化过程中,具体优化过程已在相关文献[4]中详述,本文不在赘述。同时,本文以参照文献[4]中的滤波效果评价为基础,将均方根误差、信噪比和平滑度指标作为基础指标,将三者进行归一化后的累加值作为滤波效果评价的综合指标,具体结果详见表 2。

表 2 滤波效果统计

滤波类型	评价指标			
	均方根误差	信噪比	平滑度指标	综合指标
标准型	3.2467	31.3600	1.2531	0.6308
自适应型	2.3980	38.2200	1.1222	0.7706
抗差自适应型	2.5445	37.1400	1.1661	0.7390
半参数型	1.9047	40.6200	1.0927	0.8596

对比 3 个基础指标的结果,得出三者对 4 种卡尔曼滤波效果的评价具有较好的相似性,说明将其

作为基础评价指标的可信度较高;同时,根据综合评价指标的结果,得出半参数型卡尔曼滤波的滤波效果最优,其次是自适应型卡尔曼滤波、抗差自适应型滤波和标准型卡尔曼滤波,因此,将半参数型卡尔曼滤波的结果作为趋势项与误差项分离的依据。

#### 3.3 趋势项的预测

根据本文预测模型的步骤,采用 GA - BP 神经网络和 LS - GM(1,1)模型对上一步分离的趋势项数据进行预测,结果如表 3、4 所示。在 GA - BP 神经网络的优化过程中,各预测节点的预测精度均得到了不同程度的提高,其中以第 12 周期的预测精度提高最大,且 GA - BP 神经网络较传统 BP 神经网络的平均相对误差由 4.34% 减小到了 1.67%,说明采用遗传算法对 BP 神经网络的优化效果较好,函数逼近能力较强;在 LS - GM(1,1)模型的优化过程中,最小二乘法对 LS - GM(1,1)模型的优化也取得了较好的效果,其中第 11 周期的预测精度提高最大,并将平均预测相地误差由 4.69% 减小到了 2.11%,LS - GM(1,1)模型的初始值对预测精度的影响较大,本文采用最小二乘法对初始值进行优化达到了预期的效果。

表 3 GA - BP 神经网络预测结果

监测周期	沉降值/mm	传统 BP 神经网络		GA - BP 神经网络	
		预测值/mm	相对误差/%	预测值/mm	相对误差/%
9	7.95	7.67	3.52	7.72	2.89
10	8.02	7.71	3.87	7.82	2.49
11	8.52	8.15	4.34	8.29	2.70
12	8.98	8.59	4.34	8.83	1.67

表 4 LS - GM(1,1)模型预测结果

监测周期	沉降值/mm	传统 GM(1,1)模型		LS - GM(1,1)模型	
		预测值/mm	相对误差/%	预测值/mm	相对误差/%
9	7.95	7.48	5.91	7.66	3.65
10	8.02	7.78	2.99	7.81	2.62
11	8.52	8.12	4.69	8.34	2.11
12	8.98	8.66	3.56	8.74	2.67

同时,考虑到不同预测模型的预测原理及预测过程中所需的信息具有一定的差异,致使其预测效果也具有一定的不同,为对比 BP 神经网络和 GM(1,1)模型的预测效果,再对上述 4 种预测模型

的误差平方和进行求解作图,得图2。

由图2对比各模型的误差平方和,得出通过优化均很大程度上提高了预测精度,且GA-BP神经网络的预测精度要优于LS-GM(1,1)模型,说明BP神经网络在本文实例中的适用性相对更好。

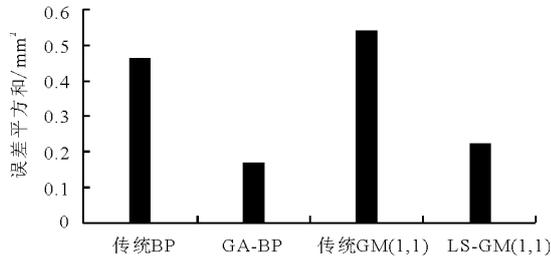


图2 各趋势项预测模型误差平方和对比

为增加预测结果的稳定性,本文以误差平方和和方差值为指标,将GA-BP神经网络和LS-GM(1,1)模型的预测结果进行组合预测,由于上述两指标值越小说明其预测效果越优,因此,将两者进行倒数处理后的归一化值来确定组合权重。其中,误差平方和指标确定的组合权重分别为0.4143和0.5857,而方差指标确定的组合权重分别为0.3332和0.6668,经过组合预算得到两组合方法的预测结果如表5所示。由表5统计可知,误差平方和法组合结果的相对误差均值为2.62%,而方差法组合结果的相对误差均值为2.64%,两者差异不大,以前者的组合结果相对略优,因此,将其作为趋势项的最终预测结果,进一步分离出误差信息,且将该误差信息叠加到上一步的误差项中,作为后期误差修正的基础数据,同时也利用误差平方和法组合法对13~15周期进行趋势判断预测,组合权值仍为0.4143和0.5857。

表5 趋势项组合预测结果

监测周期	沉降值/mm	误差平方和法		方差法	
		预测值/mm	相对误差/%	预测值/mm	相对误差/%
9	7.95	7.69	3.32	7.68	3.35
10	8.02	7.81	2.56	7.81	2.57
11	8.52	8.32	2.37	8.32	2.34
12	8.98	8.78	2.24	8.78	2.28
13		9.13			
14		9.22			
15		9.35			

### 3.4 误差值修正

依据马尔科夫链的基本原理,对大厦的沉降残余误差序列进行误差修正,结果如表6所示。

由表6可知,在误差修正过程中,虽一定程度上修正了残差值,但最后剩余的误差值或相对误差值均较大,这与残差序列含有较多的随机信息相关,说明在监测过程中应尽量减弱环境因素、人为因素等对监测结果的影响。

表6 残余误差序列修正

监测周期	残差值/mm	残差预测结果	
		预测值/mm	误差值/mm
9	0.61	0.42	0.19
10	0.89	0.59	0.30
11	0.84	0.70	0.14
12	1.07	0.87	0.20
13		0.61	
14		0.66	
15		0.75	

通过前文的分阶段预测及后期的误差修正预测,将其预测结果进行叠加即可得到大厦的沉降变形预测值,详见表7。

表7 大厦沉降变形预测结果

监测周期	沉降值/mm	预测结果			
		趋势项/mm	误差修正值/mm	预测值/mm	相对误差/%
9	8.30	7.69	0.48	8.17	1.61
10	8.70	7.81	0.76	8.57	1.44
11	9.16	8.32	0.70	9.02	1.55
12	9.85	8.78	0.91	9.69	1.63
13		9.13	0.61	9.74	
14		9.12	0.66	9.78	
15		9.35	0.75	10.10	

由表7可知,相对误差值均小于2%,最大相对误差仅为1.63%,说明本文预测模型的预测精度较高,且误差值的方差仅为0.0735,预测结果的稳定性较好,有效验证了本文预测模型的可行性和有效性,同时根据外推预测结果,得出高层建筑在13~15周期的变形表现为持续增长的趋势,但增长速率较小,逐渐趋于稳定。

### 3.5 稳定性分析

利用Matlab拟合工具箱实现高层建筑位移序

列的多项式拟合,得到拟合函数的表达式如下:

第1阶段(1至9周期):

$$U = -0.989 + 0.004t - 0.027t^2 - 0.015t^3 + 1.764t^4$$

第2阶段(1至12周期):

$$U = -1.516 - 0.008t + 0.031t^2 - 0.368t^3 + 2.560t^4$$

根据拟合结果,得到第1阶段拟合曲线的拟合度为0.996,误差平方和为0.1038,均方根误差为0.1611;第2阶段拟合曲线的拟合度为0.994,误差平方和为0.2530,均方根误差为0.1901,说明两阶段的四次多项式拟合效果较好,为后续分析奠定了基础。

再依据突变理论的基本原理,对突变参数及变量进行计算,得:

第1阶段(1至9周期):

$$\mu_1 = -0.062; v_1 = 0.0022$$

则:  $\Delta_1 = 9.723 \times 10^{-5} > 0$

第2阶段(1至12周期):

$$\mu_2 = 0.0097; v_2 = -0.0026$$

则:  $\Delta_2 = 1.936 \times 10^{-4} > 0$

根据上述计算,得到两阶段的突变变量均大于0,且以第2阶段的突变变量相对更大,说明高层建筑在监测过程及后期均处于稳定状态,且在后期将更加趋于稳定,这与变形预测的结果相符。

## 4 结 论

(1)本文综合多种预测方法,建立完善且系统的预测模型,对高层大厦工程实例的沉降变形进行预测,得到预测结果的相对误差均小于2%,预测精度较高,证明本文模型对该实例具有较好的适用性和可靠性。

(2)在本文模型的建立过程中,采用遗传算法对BP神经网络的参数进行优化,并利用最小二乘法对GM(1,1)模型的初始值进行修正,均取得了较好的效果,验证了两种优化方法的有效性。

(3)通过马尔科夫链对残差序列的修正,进一步提高了变形预测的精度,说明多阶段、多种方法的变形预测结构对提高预测精度具有较好的效果,也进一步说明了本文预测模型的有效性。同时,本文预测模型除了对高层建筑的沉降变形具有较好的效果外,对其它岩土领域也具有较好的适用性,值得深入研究。

(4)尖点突变理论能对高层建筑的稳定性进行

有效评价,且评价结果与预测结果相符,说明了该方法具有较高的准确度,在高层建筑的稳定性评价中具有适用性。

## 参考文献:

- [1] 高宁,崔希民,高彩云,等.高层建筑物沉降变形的灰线性预测[J].测绘科学,2012,37(3):96-98.
- [2] 朱军桃,李朋成.傅里叶时频分析的建筑物沉降预测[J].测绘科学技术学报,2015,32(2):111-113+119.
- [3] 高宁,高彩云.变形监测数据组合预测的串联与并联模式研究[J].大地测量与地球动力学,2013,33(3):116-120.
- [4] 王成,何美琳,覃婕,等.半参数Kalman滤波模型在GPS变形数据处理中的应用[J].施工技术,2015,44(S2):818-821.
- [5] 李彦杰,薛亚东,岳磊,等.基于遗传算法-BP神经网络的深基坑变形预测[J].地下空间与工程学报,2015,11(S2):741-749.
- [6] 任丽芳,李立增,陈艳国,等.基于遗传算法和神经网络的润扬长江大桥深基坑变形预测[J].铁道建筑,2013(8):44-46.
- [7] 何亚伯,梁城.非等距时间序列模型在隧道拱顶位移预测中的应用[J].岩石力学与工程学报,2014,33(S2):4096-4101.
- [8] 李志伟,李克昭,赵磊杰.优化的灰色非等距GM(1,1)预测模型在沉降监测中的应用[J].河南城建学院学报,2016,25(2):68-73.
- [9] 张倩,陈新,周武松,等.GA-BP遗传神经网络在地下厂房变形预测中的应用[J].水电能源科学,2016,34(6):150-152+164.
- [10] 高春玉,魏进兵,裴建良.位移反分析在地下厂房开挖中的应用[J].南水北调与水利科技,2012,10(3):133-136.
- [11] 董霄峰,王海军,杨敏.基于遗传算法优化BP神经网络的面板堆石坝变形预测[J].水利水电技术,2012,43(12):22-25.
- [12] 胡洋,杨志强,吴啸龙.自适应加权灰色预测UQGM(1,1)模型在沉降变形中的研究[J].测绘通报,2013(S1):199-201.
- [13] 吴开岩,张献州,马龙,等.基于多元整体最小二乘优化的多点灰色动态变形分析模型[J].大地测量与地球动力学,2016,36(8):682-685.
- [14] 刘淑官,黄声享,徐北海,等.基于无偏灰色马尔科夫链的基坑沉降预测研究[J].测绘地理信息,2015,40(4):10-13.
- [15] 王非.高层建筑桩基础荷载传递规律与长期沉降变形研究[D].南京:东南大学,2006.