DOI:10.11705/j.issn.1672-643X.2018.04.37

基于混合变异策略差分进化算法的边坡滑裂面搜索研究

张子映[1], 柴军瑞[1], 张书滨[2], 钱武文[1]
(1. 西安理工大学 西北旱区生态水利工程国家重点实验室培育基地, 陕西 西安 710048;
2. 江西省河道湖泊管理局, 江西 南昌 330009)

摘 要: 针对"基于反射变异策略的自适应差分进化算法"仍易陷入局部最优的问题,通过引入一个基本的变异策略提出一种基于混合变异策略(DE/current-to-rand/1)的差分进化算法。根据各变异策略生成成功子代的比率使用轮盘赌选择为各个个体选择合适的变异策略,以改善算法的全局收敛能力。将提出的算法结合有限元应力场应用于两个经典算例的边坡临界滑动面搜索及安全系数求解,与其他极限平衡法进行了对比,并使用其中一个算例作为计算模型与其他优化算法进行了收敛性能比较。统计结果验证了改进算法的性能更稳定且收敛速度较快,也验证了该算法结合有限元应力场求解边坡问题的有效性。

关键词: 改进差分进化算法; 混合变异策略; 有限元极限平衡法; 边坡稳定; 最危险滑动面; 新型变异策略
中图分类号:TU43 **文献标识码**: A **文章编号**: 1672-643X(2018)04-0218-06

Research on slope sliding surface search based on differential evolution algorithm with mixed mutation strategy

ZHANG Ziying[1], CHAI Junrui[1], ZHANG Shubin[2], QIAN Wuwen[1]
(1. *State Key Laboratory Base of Eco-hydraulic Engineering in Arid Area, Xi'an University of Technology, Xi'an* 710048, *China*; 2. *Jiangxi River and Lake Management Bureau, Nanchang*, 330009, *China*)

Abstract: In order to solve the problem that adaptive differential evolution algorithm based on reflection mutation strategy is prone to local optimization, a differential evolution algorithm based on mixed mutation strategy is proposed by introducing a basic mutation strategy, DE/current-to-rand/1. In order to improve the global convergence of the algorithm, the percentage of successful subgenerations based on the mutation strategy uses the roulette selection to select the appropriate mutation strategy for each individual. In this paper, the proposed algorithm combined with the finite element stress field is applied to the critical sliding surface search and the safety coefficient solution of two classical calculation examples. The results are compared with other limit equilibrium methods, and one example is used as a computational model to compare the convergence performance with other optimization algorithms. The results show that the improved algorithm proposed here has more stable performance and faster convergence speed. It also proves the effectiveness of the algorithm in combination with the finite element stress field to solve the slope problem.

Key words: improved differential evolution algorithm; mixed mutation strategy; finite element limit equilibrium method; slope stabilization; most dangerous sliding surface; new mutation strategy

1 研究背景

边坡滑动面搜索是边坡稳定计算中的一个关键问题,其实质为安全系数[1-4]与最危险滑动面[5-7]的搜索问题。在这一领域出现了较多的优化搜索方法,模式搜索法、动态规划法、数学归纳法、变分法、

收稿日期:2018-02-26; **修回日期**:2018-04-18
基金项目:国家自然科学基金项目(51679197); 陕西省重点科技创新团队(2013KCT-015)
作者简介:张子映(1993-),女,江西吉安人,硕士研究生,研究方向为边坡稳定分析。

随机搜索法等。随着优化方法研究的深入,人工智能搜索算法如遗传算法[8-9]、模拟退火算法、粒子群优化算法、蚁群算法[10]、神经网络以及蒙特卡洛法[11]等被用于边坡最危险滑动面搜索,且目前已成为滑动面搜索研究中的主流方法。这些智能寻优法各有其优点但也都存在不足之处,例如:遗传算法存在早熟收敛、算法性能对参数选取强依赖性而参数不易确定等缺陷[9];模拟退火算法在实际应用中由于退火不充分并不能保证一定能搜索到全局最优值;粒子群优化算法[12-13]易陷入局部最优;蚁群算法[14-15]最初被设计用于组合优化问题,其缺少用于连续数值优化的操作算子,用于边坡滑动面搜索问题时,需要对边坡进行一定精度的离散,操作过程复杂,同时也存在易于陷入局部最优的问题,有待进一步改进。

差分进化(differential evolution,简称 DE)算法是由 Storn 等[16]于 1995 年提出的一种智能优化算法,该方法具有操作简单、收敛性好、全局寻优能力强的优点[17-19]。钱武文等[20]受 Nelder - Mead 方法启发,提出了一种名为"反射变异"的新型变异策略,具有更明确的变异方向,可即使基向量拥有一定的随机性,但仍为一种贪婪搜索策略,为进一步增强其全局收敛性能,本文在此基础上引入一个基本变异策略形成混合变异策略,并将该优化方法用于边坡临界滑动面的搜索中,通过两个经典考核算例,验证了该方法应用到边坡稳定性研究是合理可行的。

2　改进的差分进化算法

算法的全局搜索能力和局部开采能力是相互对立的,变异策略高度影响着差分进化算法的性能。参考文献[20]提出了一种名为"反射变异"的新型变异策略,并与参数自适应调整方法结合,形成了一种具有良好全局探测能力和局部开采能力的差分进化算法(RMADE)。考虑到"反射变异"从某种程度上仍属于贪婪变异策略,仍易陷入局部最优,因此为进一步改进其全局收敛能力,本文在 RMADE 的基础上引入一种基本变异策略组成混合变异策略共同控制子代个体的生成。

2.1　混合变异策略

受 Nelder - Mead 方法启发,文献[20]提出了一种名为反射变异策略的新型变异策略,该策略不论求解问题的维数,始终选择种群中的 4 个任意个体组成单纯形,每完成一次变异操作须引入一个单纯形。该策略操作如下:

$$V_{i,g} = X_{o,g} + F(X_{a,g} - X_{d,g}) \tag{1}$$

式中:$V_{i,g}$ 为 i 个体在 g 代的试向量;$X_{o,g}$ 为单纯形中心;$X_{a,g}$ 和 $X_{d,g}$ 分别为单纯形中的最好点和最坏点,F 为变异缩放因子。

不同于 Nelder - Mead 方法,本文使用的单纯形中心 $X_{o,g}$ 是根据单纯形顶点的函数值计算,并且除最坏点外的各个顶点均按其函数值权重分配到中心中。单纯形中心 $X_{o,g}$ 的计算公式如下:

$$\begin{cases} X_{o,g} = w_1 X_{a,g} + w_2 X_{b,g} + w_3 X_{c,g} \\ w_1 = \dfrac{f(X_{a,g})}{f(X_{a,g}) + f(X_{b,g}) + f(X_{c,g})} \\ w_2 = \dfrac{f(X_{b,g})}{f(X_{a,g}) + f(X_{b,g}) + f(X_{c,g})} \\ w_3 = \dfrac{f(X_{c,g})}{f(X_{a,g}) + f(X_{b,g}) + f(X_{c,g})} \end{cases} \tag{2}$$

式中:w_1,w_2 和 w_3 分别为除最坏点外的其余单纯形顶点的权重;$X_{a,g}$,$X_{b,g}$ 和 $X_{c,g}$ 为除最坏点外的剩余单纯形顶点。

这种变异策略类似于 Nelder - Mead 方法中的反射操作,具有明确的搜索方向。即使基向量拥有一定的随机性,但仍为一种贪婪搜索策略,为进一步增强其全局收敛性能,本文还引入一种基本子代生成策略(DE/current - to - rand/1),其变异向量生成如下。

$$V_{i,g} = X_{i,g} + F(X_{c,g} - X_{i,g} + X_{a,g} - X_{b,g}) \tag{3}$$

式中:$X_{i,g}$ 为当前操作个体,其他同上。

引入 DE/current - to - rand/1 后,一个种群中将同时存在两种变异策略,本文根据各策略的成功率(成功更新子代个体的比率)为各个个体轮盘赌选择其对应的变异策略。成功率的计算公式如下:

$$\begin{cases} sr_k = \sum_{i=1}^{NP} sc_{i,k} / N_k, \\ sc_{i,k} = \begin{cases} 1, & \text{if } f(U_{i,k,g}) < f(X_{i,k,g}) \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \end{cases} \tag{4}$$

式中:N_k 为种群中使用策略 k 的个体总数;sr_k 为策略 k 的成功率,在初始种群时将其设置为 0.5,以保证算法开始时各变异策略拥有总体相等的个体数。

2.2　控制参数自适应调整机制

传统的差分进化算法采用固定的变异因子和交叉因子,而针对不同的优化问题,使用固定的控制参数将严重妨碍算法的性能。

参数自适应调整机制允许每一个体使用不同于其他个体的缩放因子 F 和交叉因子 CR 去生成子代个体,且能根据算法进化过程中成功个体的经验反

馈调节控制参数。本文采用SHADE[19]算法中的参数自适应调整方法。

2.3 算法的基本思想和步骤

本文在文献[20]中算法的基础上,引入基本的变异策略DE/current-to-rand/1,从而进一步改进算法的全局搜索能力,并在降低早熟收敛可能性的同时保持原算法的收敛速度。使用自适应参数调节方法进一步提升了算法的整体性能。算法的具体步骤如下:

Step 1:初始化参数和初始种群;

Step 2:判定是否达到终止条件,若是转Step 7,若否则转Step 3;

Step 3:为每个个体分配变异因子和交叉因子;

Step 4:根据各变异策略的成功率使用轮盘赌方法为各个体分配变异策略;

Step 5:对每一靶个体,按公式(1)或(3)完成变异操作,然后完成交叉操作;

Step 6:计算试向量的函数值并与靶个体比较,选择较优个体替换靶个体;

Step 7:输出最优个体。

3 基于DE的边坡稳定分析

3.1 滑动面上任意点应力张量计算

为克服极限平衡法分析结果不考虑土体应力应变状态的缺陷,本文采用有限元软件进行边坡极限平衡分析,即先计算获得边坡高斯应力场,然后根据双线性插值计算得到各单元节点的应力值。

$$\sigma = \sum_{i=1}^{4} N_i\sigma_i,\ N_i = \frac{1}{4}(1+\xi_i\xi)(1+\eta_i\eta) \tag{5}$$

式中:N_i为双线性插值函数;ξ,η为自然坐标,本文采用笛卡尔坐标系。

生成滑动面$y = y(x)$,对滑动面离散成多个线单元。依次对滑动面上每个线单元的每个高斯点查找其归属的有限元单元,由这个单元的各个节点的方向应力形函数插值得到高斯点的方向应力,即$\sigma_x,\sigma_y,\tau_{xy}$。

$$\begin{cases} X = \sum_{i=1}^{2} N_i X_i \\ Y = \sum_{i=1}^{2} N_i Y_i \end{cases} \tag{6}$$

式中:$N_1 = \frac{1-\xi}{2}$,$N_2 = \frac{1+\xi}{2}$,再通过公式(7)得到线单元高斯点的法向应力和切应力。

$$\begin{cases} \sigma_n = \frac{1}{2}(\sigma_x+\sigma_y) + \frac{1}{2}(\sigma_x-\sigma_y)\cos2\alpha + \tau_{xy}\sin2\alpha \\ \tau = \frac{1}{2}(\sigma_x-\sigma_y)\sin2\alpha - \tau_{xy}\cos2\alpha \\ \sin2\alpha = \frac{2Y_n'}{1+Y_n'^2} \\ \cos2\alpha = \frac{1-Y_n'^2}{1+Y_n'^2} \\ Y_n' = \frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}Y} = -\frac{X_2-X_1}{Y_2-Y_1} \end{cases} \tag{7}$$

3.2 安全系数计算

任意滑动面上土体整体达到极限平衡状态的充要条件是:$\int_l \tau\mathrm{d}l = \int_l \tau_f\mathrm{d}l$。假定岩土材料服从摩尔-库仑强度准则,则安全系数表示为滑动面上的总抗滑力与总滑动力之比,即:

$$K = \frac{R}{T} = \frac{\int_l (\sigma_n\tan\Phi + c)\mathrm{d}l}{\int_l \tau\mathrm{d}l} \tag{8}$$

式中:c、φ分别为材料的凝聚力和内摩擦角。σ_n、τ分别为曲线上任意一点土体方向应力和这点位置沿曲线的剪应力。

若将滑动面视为由一系列连续线段组成,将滑裂面离散化处理,应用高斯积分得边坡安全系数为:

$$K = \frac{\sum_{e=1}^{m-1}\sum_{j=1}^{N_e}(\sigma_n\tan\Phi + c)_\xi |J| A_j}{\sum_{e=1}^{m-1}\sum_{j=1}^{N_e}\tau_\xi |J| A_j} \tag{9}$$

式中:e为离散后曲线上的单元;$|J|$为雅可比行列式;A_j为曲线的高斯积分权数,取两点积分时已满足精度要求,即$\xi_1 = -\frac{1}{\sqrt{3}}$,$A_1 = 1$,$\xi_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}$,$A_1 = 2$。

3.3 任意滑裂面构造方法

滑裂面由n个控制点$\{(x_1,y_1),(x_2,y_2),\cdots,(x_n,y_n)\}$组成的$n-1$个小片段近似构造。由于滑入点和滑出点都位于边坡轮廓线上,其纵坐标y_1和y_n都可据已知的轮廓线求出,因此通过事先固定中间控制点的横坐标,进一步减少搜索变量的个数,即由n个控制点近似的滑裂面的搜索变量为$S = \{x_1, y_2,\cdots,y_{n-1},x_n\}$。

合理的滑裂面并非这些点在平面内任意分布的组合,通常将这些片段组成的滑裂面向上凹时视为合理,如图1所示,这意味着滑裂面通常需要满足以下特征[21],即:

$$\alpha_1 \geqslant \alpha_2 \geqslant \cdots \geqslant \alpha_{n-1} \tag{10}$$

式中:α_i 为线段 i 的倾角;n 为滑裂面控制点的个数。

式(10)亦可用线段斜率 k_i 表示,即:

$$k_1 \geqslant k_2 \geqslant \cdots \geqslant k_{n-1} \tag{11}$$

使用点坐标表示后,有:

$$\frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} \geqslant \frac{y_2 - y_3}{x_2 - x_3} \geqslant \cdots \geqslant \frac{y_{n-1} - y_n}{x_{n-1} - x_n} \tag{12}$$

则优化问题变为带有 $n-2$ 个约束的优化问题,优化变量为 $S = \{x_1, y_2, \cdots, y_{n-1}, x_n\}$,即:

$$\min F(S),\ S = \{x_1, y_2, \cdots, y_{n-1}, x_n\}$$

$$\text{s.t. } \frac{y_j - y_{j+1}}{x_j - x_{j+1}} - \frac{y_{j+1} - y_{j+2}}{x_{j+1} - x_{j+2}} \geqslant 0 \tag{13}$$

$$j = 1,2,\cdots,n-2;\quad l_i \leqslant S_i \leqslant u_i;$$

$$i = 1,2,\cdots,n$$

在智能优化领域,约束的存在易造成可行域的减少进而使得解的搜索变得更加复杂。边坡临界滑裂面的搜索属于有约束优化问题,考虑到一般情况不合理的滑裂面对应的安全系数比合理滑裂面更大的特性,可将有约束优化直接按无约束优化处理。

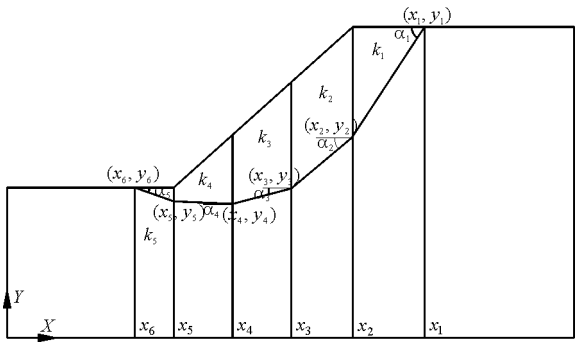


图 1　合理的边坡滑动面

3.4　求解最危险滑裂面

求解最危险滑裂面的程序流程如下(程序框图见图 2):

(1)根据边坡地层分布情况及边坡剖面界限,运用有限元软件进行合理的有限元网格划分,并计算边坡应力场。

(2)差分进化算法应用于滑裂面搜索,每个个体代表一个滑裂面,每个滑裂面由 n 个控制点组成的曲线,故每个个体就是一个 n 维的向量 $X_i = [x_1, y_2, \cdots, y_{n-1}, x_n]$。

(3)在算法搜索前,根据剖面的几何模型对个体的每个维度设定合理的搜索区域。其控制方式为:第一个滑入点和最后一个滑出点的搜索范围位于坡表,中间控制点纵坐标为搜索区间随机初始化值 $y_2, y_3, \cdots y_{n-1}$。

(4)构建初始种群 $\{X_1, X_2, \cdots, X_{NP}\}$ 后,使用有限元极限平衡法计算个体 X_i 的安全系数 K_i,用差分进化算法搜索出最佳滑裂面 X_{best}。

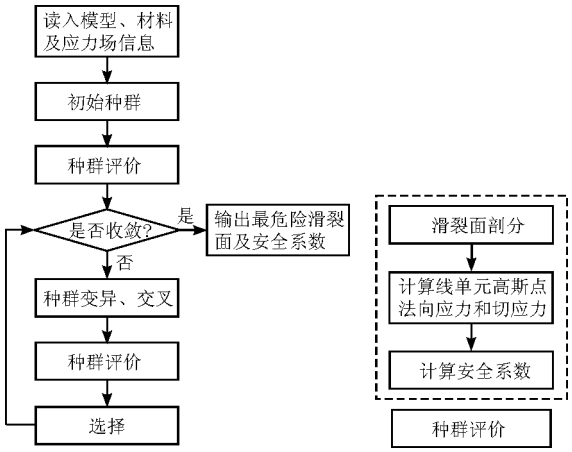


图 2　基于差分进化算法的有限元极限平衡法的流程图

4　算例验证

本算例使用 8 个滑裂面控制点(滑入点、滑出点以及 6 个中间控制点),因此只需搜索滑入点和滑出点的 X 值以及 3 个中间控制点的 Y 坐标值。为了使中间控制点更好地反映滑面的形状,尽可能地将中间控制点的横坐标均匀分布在搜索域内。种群规模设置为 40,最大迭代次数设为 150。

4.1　均质边坡

引用澳大利亚计算机应用协会(ACADS)通用考题 1,坡高为 10 m,坡角 30°,土容重 $\gamma = 20$ kN/m^3,黏聚力 $c = 3$ kPa,土的弹性模量 $E = 10^4$ kN/m^2,内摩擦角 $\varphi = 19.6°$,泊松比 $\nu = 0.25$。推荐的安全系数为 1.0。应力计算模型如图 3 所示,假定区域左右边界为法向约束,底部边界为固定端约束。

建立有限元模型,使用理想弹塑性本构模型计算基于 Mohr-Coulomb 强度破坏准则的边坡土体的应力场分布,进而以本文方法确定最危险滑动面的位置和其对应的安全系数。为了进行比较,将结果与使用传统极限平衡法 spencer、Bishop 和 Janbu 法稳定性分析的结果比较,将各方法所得到的安全系数和最危险滑裂面汇总绘制于图 4 中。由图 4 可知,圆弧滑动搜索结果为 $K_{Janbu} = 0.966$, $K_{Bishop} = 0.996$, $K_{Spencer} = 0.995$, 推荐安全系数为 1.0。本文方法搜索的边坡最危险滑面安全系数为 1.055,仅与推荐的安全系数相差 5.5%,在合理范围,本文方法正确。

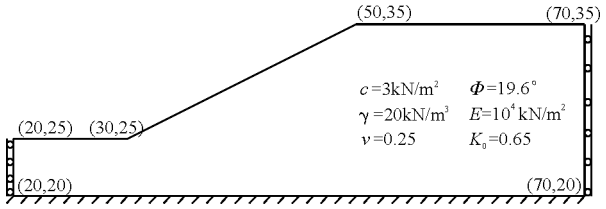


图 3 边坡几何模型

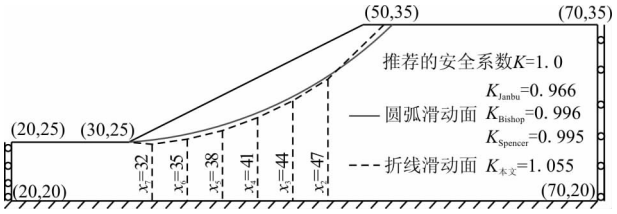


图 4 各方法搜索的最危险滑裂面对比

4.2 非均质边坡

引用澳大利亚计算机应用协会(ACADS)一通用考题。坡体由 3 种土料构成,坡高为 10 m,坡比为 1∶2,边坡几何特征如图 5 所示,其材料特性如表 1 所示,推荐的安全系数为 1.0。

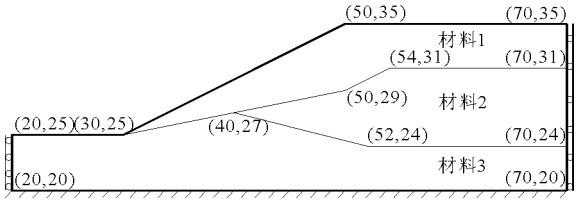


图 5 边坡几何模型

表 1 非均质边坡材料性质

土号	C/(kN·m⁻²)	φ/(°)	γ/(kN·m⁻³)	E/(kN·m⁻²)	ν	K_0
1#土	0.0	38.0	19.5	1.0×10^4	0.25	0.65
2#土	5.3	23.0	19.5	1.0×10^4	0.25	0.65
3#土	7.2	20.0	19.5	1.0×10^4	0.25	0.65

建立有限元模型,使用理想弹塑性本构模型计算基于 Mohr-Coulomb 强度破坏准则的边坡土体的应力场分布,进而以本文方法确定最危险滑动面的位置和其对应的安全系数。同上,将各方法所得到的安全系数和最危险滑裂面汇总绘制于图 6 中。

由图 6 可知,圆弧滑动搜索结果为 K_{Janbu} = 1.341,K_{Bishop} = 1.442, $K_{Spencer}$ = 1.419, 推荐安全系数为 1.39。本文方法搜索的边坡最危险滑面安全系数为 1.375,比推荐的安全系数小 1.08%,在合理范围。本文计算结果处于 Janbu 法与 Bishop 法和 Spencer 法之间,且略小于 Bishop 法和 Spencer 法,说明本文方法的准确性。基于有限元弹塑性变形的极限平衡法滑面起始部分较圆弧法略有“上翘”,尾部略有“下沉”,考虑到土体的弹塑性变形这种现象是可以解释的。说明是否考虑塑性变形对边坡的滑面位置和安全系数影响较大。

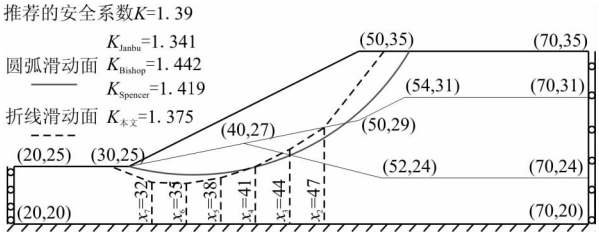


图 6 各方法搜索出的最危险滑裂面对比

4.3 收敛性能比较

使用上节非均质边坡作为计算模型,将本文改进的差分进化算法与单纯形法、DE、RMADE 进行比较,研究不同算法对边坡临界滑动面搜索的影响。鉴于单纯形法为无约束优化算法,而滑面受到边坡坡体区域的限制,因此本文对单纯形法中的初始单纯形生成方法进行了略微调整,即引入差分进化算法中的初始种群技术生成初始单纯形。

文中使用的单纯形法的反射系数、扩张系数以及收缩系数分别为 1.0、1.3 和 0.7,DE 的缩放因子 F = 0.8,交叉因子 CR = 0.8。种群规模 NP =40,最大迭代次数为 200。为了研究算法搜索临界滑面的稳定性,各算法均独立运行 10 次,记录最大值、平均值、最小值以及标准差于表 2 中,各算法的典型收敛过程线绘于图 7 中。

表 2 独立 10 次计算下各算法性能比较

算法	最大值	平均值	最小值	标准差
单纯形法	1.9535	1.4557	1.3774	1.766×10^{-1}
DE	1.3765	1.3752	1.3746	5.941×10^{-4}
RMADE	1.3754	1.3748	1.3745	3.817×10^{-4}
本文算法	1.3749	1.3747	1.3746	8.963×10^{-5}

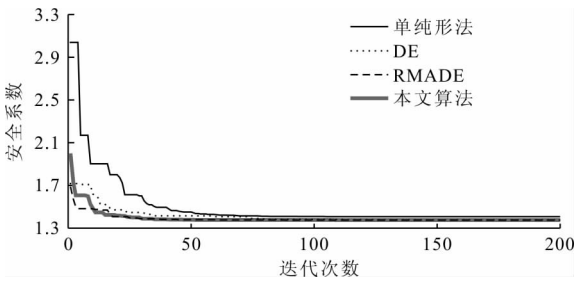


图 7 各算法的收敛过程

由表 2 可知,单纯形法结果最为发散,说明其已陷入局部最优,本文算法的平均值和标准差最小,说明其性能较其他方法要好且更稳定。由图 7 可知,本文算法拥有较快的收敛速度。综合可知,本文算法性能优于其他几种方法,说明本文对 RMADE 的改进具有实际意义。

5 结　论

(1)本文在 RMADE 的基础上引入一个基本的变异策略 DE/current - to - rand/1 而形成了一种改进的差分进化算法,该方法根据各变异策略的子代成功率使用轮盘赌选择自动选择个体变异策略,并与其他优化方法进行比较验证了本文提出的算法具有更好的寻优性能。

(2)将本文改进的差分进化算法与有限元极限平衡法结合,应用于边坡稳定性分析中,通过两个算例验证了该法解决边坡稳定性问题的有效性。

参考文献:

[1] 邵龙潭,李红军. 土工结构稳定有限元极限平衡分析法及其应用[M]. 北京:科学出版社,2011.

[2] 冯 欣, 熊子正, 滕志强,等. 基于积分法的均质边坡稳定性区间分析[J]. 水资源与水工程学报, 2017,28(1):192 - 196.

[3] 窦 灿, 商开卫, 张伯涛. 杨房沟水电站高边坡块体极限平衡稳定性分析[J]. 水资源与水工程学报, 2011, 22(1):50 - 54.

[4] 祁小辉, 李典庆, 周创兵,等. 考虑土体空间变异性的边坡最危险滑动面随机分析方法[J]. 岩土工程学报, 2013, 35(4):745 - 753.

[5] 孙 聪, 李春光, 郑 宏. 基于整体稳定性分析法的边坡临界滑动面搜索[J]. 岩土力学, 2013,34 (9): 2583 - 2588.

[6] 李 宁, 郭双枫, 姚显春. 边坡潜在滑动面模拟方法研究[J]. 岩石力学与工程学报, 2016,35(12): 2377 - 2387.

[7] 郭明伟, 李春光, 葛修润,等. 基于矢量和分析方法的边坡滑面搜索[J]. 岩土力学, 2009, 30(6): 1775 - 1781.

[8] 谢桂华,刘荣桂,王 军. 基于遗传算法的边坡关键概率滑面搜索[J]. 江苏科技大学学报(自然科学报),2011, 25(2):115 - 118

[9] 李南生, 唐 博, 谈风婕,等. 基于统一强度理论的土石坝边坡稳定分析遗传算法[J]. 岩土力学, 2013, 34(1):243 - 249.

[10] 高 玮, 张鲁渝, 张飞君. 边坡临界滑动面搜索的奖惩蚁群算法研究[J]. 水利学报, 2012, 43(2): 209 - 215.

[11] 邓志平, 李典庆, 曹子君,等. 考虑地层变异性和土体参数变异性的边坡可靠度分析[J]. 岩土工程学报, 2017, 39(6):986 - 995.

[12] 黄晓锋, 石 崇, 朱珍德,等. 基于粒子群优化算法的边坡临界滑动面搜索方法[J]. 防灾减灾工程学报, 2014, 34(6):751 - 757.

[13] 胡卫东, 曹文贵. 基于粒子群 BP 网络混合算法的边坡稳定性评价[J]. 铁道科学与工程学报, 2015,12(1):66 - 71.

[14] KAHATADENIYA K S, NANAKORN P, NEAUPANE K M. Determination of the critical failure surface for slope stability analysis using ant colony optimization[J]. Engineering Geology, 2009, 108(1 - 2):133 - 141.

[15] 石 露, 李小春, 孙冠华,等. 地下矿体采动下的露天采场边坡稳定性研究[J]. 岩土力学, 2012, 33(3):812 - 820.

[16] STORN R, PRICE K. Differential evolution - a simple and efficient heuristic for global optimization over continuous spaces [J]. Journal of Global Optimization, 1997, 11(4):341 - 359.

[17] 张春美. 差分进化算法理论与应用[M]. 北京: 北京理工大学出版社, 2014.

[18] QIN A K, HUANG V L, SUGANTHAN P N. Differential evolution algorithm with strategy adaptation for global numerical optimization [J]. IEEE Transactions on Evolutionary Computation, 2009, 13(2):398 - 417.

[19] TANABE R, FUKUNAGA A. Success - history based parameter adaptation for Differential Evolution[C]// IEEE Evolutionary Computation, 2013:71 - 78.

[20] 钱武文,柴军瑞,张子映,等. 基于反射变异策略的自适应差分进化算法[J/OL]. 计算机工程与应用,2012,49(6): 1288 - 1297[2017 - 12 - 01]. http://kns.cnki.net/ kcms/detail/11.2127.TP.20171130.1606.010.html .

[21] MALKAWI A I H, HASSAN W F, SARMA S K. Global search method for locating general slip surface using monte carlo techniques[J]. Journal of Geotechnical & Geoenvironmental Engineering, 2001,127(8): 688 - 698.