

基于 Copula 函数的设计暴雨雨型研究

叶姗姗¹, 叶兴成², 王以超², 朱程亮², 刘俊¹

(1. 河海大学 水文水资源学院, 江苏 南京 210098; 2. 宿迁市水务局, 江苏 宿迁 223800)

摘要: 城市原有排水防涝系统设计标准偏低会导致洪涝灾害频率升高。设计暴雨雨型是制定排水防涝系统设计标准的重要依据和前提,对城市建设和洪涝治理至关重要。采用同频率法、SCS法、暴雨衰减指数法和概率密度函数(PDF)法对宿迁市设计暴雨雨型进行研究,基于 Copula 函数的风险联合概率模型对 4 种雨型结果进行对比分析。研究表明:同频率法和暴雨衰减指数法的设计雨型相似,风险率相近;SCS 法的雨峰偏大,风险率较小,但其最大 6 h 时段的降雨不集中;PDF 法的雨峰与同频率法一样,但其最大 3 和 6 h 雨量较为集中,风险率最小。本次的研究方法和结果可以对设计雨型的方法和对比提供新思路 and 参考。

关键词: 暴雨雨型; 同频率法; SCS 法; 暴雨衰减指数法; 概率密度函数; Copula 函数

中图分类号:TV122⁺.1

文献标识码:A

文章编号:1672-643X(2018)03-0063-06

Research on design rainstorm pattern based on Copula function

YE Shanshan¹, YE Xingcheng², WANG Yichao², ZHU Chengliang², LIU Jun¹

(1. College of Hydrology and Water Resources, Hohai University, Nanjing 210098, China;

2. Suqian Water Authority, Suqian 223800, China)

Abstract: Low design standards of urban original drainage waterlogging system would increase the frequency of flood disasters. Design storm pattern is an essential basis and prerequisite for formulating the design standards of drainage waterlogging prevention system and has large impact on urban construction and flood management. The same frequency method, SCS method, rainstorm attenuation index method and probability density function (PDF) method have been used to obtain the design storm pattern of Suqian city. Based on the risk joint probability of Copula function, results of the four rain types have been analyzed. Results show that the same frequency method and rainstorm attenuation index method have the similar pattern and risk probability. The rain peak of SCS method is large and the risk probability is small, but the rainfall is less concentrated in the maximum 6h period. Moreover, the PDF method has the similar rain peak with the same frequency method, while the maximum 3h and 6h rainfalls are relatively more concentrative, and the risk probability is the smallest. Results of this research could provide new ideas and references for the development and comparison of rain storm patterns.

Key words: rainstorm pattern; same frequency method; SCS method; storm attenuation index method; PDF(probability density function) method; Copula function

1 研究背景

随着全球气候的不断变化,城市化建设进程加快和原有排水防涝系统设计标准偏低等因素,宿迁市常出现较严重的洪涝灾害,因此科学确定城市排涝设施的建设标准已成为解决城市暴雨内涝的重要

任务之一。设计雨型是制定排水系统设计标准的重要依据和前提,能为城市排水系统的规划和管理、暴雨洪水分析和流域调洪计算提供科学依据^[1]。国内的雨型研究开展较晚,以往常用同倍比和同频率雨型,后又引入 Keifer 和 Chu 雨型、Pilgrim & Cordey 雨型、huff 雨型和 Yen & Chow 雨型^[2],岑国平

收稿日期:2017-10-31; 修回日期:2018-01-28

基金项目:国家自然科学基金项目(41471015)

作者简介:叶姗姗(1992-),女,河南驻马店人,硕士研究生,研究方向为城市防洪与排水。

通讯作者:刘俊(1968-),男,安徽当涂人,博士,教授,博士生导师,研究方向为城市防洪与减灾。

等^[3]对此进行了大量的研究。国外的雨型设计除上述的方法外还有概率密度函数法、随机模型法和离散法等。随机模型法分为单站点模型(如 Newman - scott 模型和 Bartlett - Lewis 模型)、多站点模型(如马尔可夫链模型)和时空模型。离散法有级联过程法、混沌过程法和人工神经网络法等^[4]。

近年来国内的雨型研究进展缓慢,还是以芝加哥雨型和 PC 雨型为研究重点,和国外的雨型研究成果相差甚远,进一步深入研究和推进设计雨型工作具有重大意义。因此本文以宿迁市 1981 - 2016 年 36 a 的实测逐时降雨资料为例,在原有设计雨型方法的基础上进行创新,应用同频率法 SCS 法、暴雨衰减指数法和 PDF 法来建立宿迁设计雨型,并用 Copula 函数的风险联合概率将其与同频率雨型进行对比,分析这 3 种方法应用于宿迁市设计暴雨雨型研究的合理性。

2 设计雨型的研究方法

宿迁地处亚热带和暖温带的过渡地区,主要受北方西风槽、冷涡和热带台风,及当地生成的江淮切变线和气旋等天气系统影响,暴雨主要发生在 7 - 9 月份,具有时长、量大、面广的特点,其中特大暴雨会对其城市防洪排涝系统带来巨大挑战。宿迁闸站位于宿迁中心城区边缘,离中心城区最近,是水文部门的国家基础站,其可靠性、一致性和代表性良好。

选取宿迁闸站观测数据,采用年最大值法选取 1981 - 2016 年的实测 24 h 降雨资料,运用下面的 4 种设计雨型方法推求宿迁市设计暴雨雨型。

2.1 同频率法雨型

同频率法即选取当地实测的典型暴雨,对其降雨过程进行同频率分时段缩放^[5]。放大倍比系数公式:

$$K = \frac{X_{\text{设计}}}{X_{\text{典型}}} \quad (1)$$

式中: $X_{\text{设计}}$ 为不同重现期的设计降雨量,mm; $X_{\text{典型}}$ 为典型暴雨降雨量,mm。

宿迁市 2010 年 9 月 7 日遭遇特大暴雨,日雨量为历史第二位,达 35 年一遇,引起巨大的洪涝灾害。该次暴雨雨型为主副型,雨量集中,雨峰偏后,在水文气象特征上具有一定代表性,故选取该特大暴雨过程作为典型暴雨。

采用皮尔逊 III 型目估适线法^[6]计算宿迁市各重现期各时段设计降雨量如表 1。

表 1 不同重现期下各历时设计降雨量 mm

重现期/a	降雨历时/h				
	1	3	6	12	24
10	58.5	104.0	137.0	160.0	181.4
20	68.7	122.6	160.2	185.5	210.0
50	81.5	146.0	189.6	217.7	246.2
100	90.7	163.1	211.0	241.2	272.6

典型暴雨的最大 1、3、6、12 和 24 h 的时段降雨量分别为 65.9、147.2、221.1、251.1 和 256.7 mm,根据公式(1)可计算出各重现期的各时段放大系数,通过缩放典型暴雨过程即得 24 h 的设计雨型如图 1 所示。

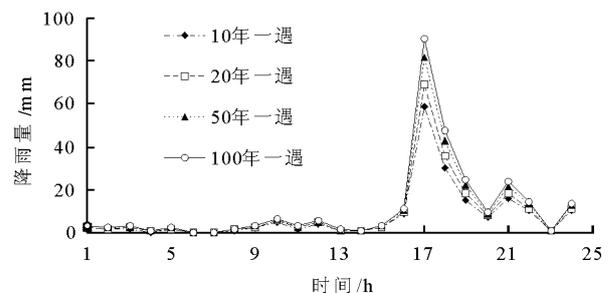


图 1 宿迁市 24 h 设计雨型(同频率法)

2.2 SCS 雨型

SCS 雨型是由美国水土局于 20 世纪 80 年代建立的,具体分为 4 种类型。其中 SCS - II 代表由夏季阵雨造成的降雨历时短但强度高的降雨地区,与宿迁市的降雨特征较相似^[7]。SCS - II 雨型的各时段百分比累积数据见表 2。

表 2 SCS - II 雨型时程分布数据

时段/h	时程分布比例											
1 ~ 12	0.011	0.022	0.035	0.048	0.063	0.080	0.099	0.120	0.147	0.181	0.235	0.663
13 ~ 24	0.772	0.820	0.854	0.880	0.902	0.921	0.938	0.952	0.965	0.977	0.989	1

由表 2 各时段累积比例计算降雨时程分配比例,根据宿迁市不同重现期的 24h 设计雨量可推求

出其 SCS - II 设计雨型如图 2 所示。

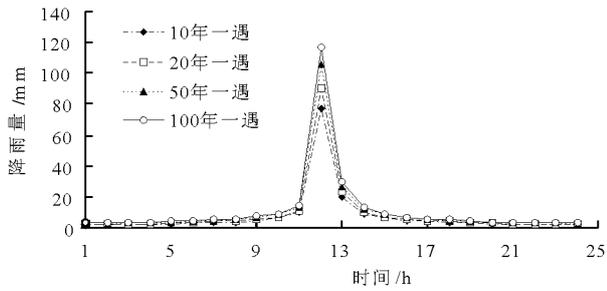


图2 宿迁市 24 h 设计雨型(SCS - II 法)

2.3 暴雨衰减指数法雨型

宿迁网站有详细的 1、3、6 和 24 h 的降雨系列且属于中小流域,可引入暴雨衰减指数来推求设计雨型^[8]。暴雨衰减指数越大表示降雨越集中。由小流域暴雨公式可知,第 k 时段暴雨量 h_k 为:

$$h_k = i_k t = \left(\frac{24}{t}\right)^{n_p-1} \cdot H_{24p} \cdot B_k \quad (2)$$

式中: h_k 为汇流时间(t) 内的暴雨量,mm; i_k 为汇流时间内的暴雨强度,mm/h; H_{24p} 为 24 h 的暴雨量,mm; B_k 为暴雨分配系数; n_p 为暴雨衰减系数。

当 $B_k = 1$ 时,反推算汇流时间区间为(t_1, t_2) 的暴雨衰减系数为:

$$n_p(t_1, t_2) = 1 + \log_{t_2/t_1} \frac{h_{t_1}}{h_{t_2}} \quad (3)$$

式中: t_1, t_2 为汇流时间,h; h_{t_1}, h_{t_2} 为对应汇流时间的设计降雨量,mm。

由表 1 宿迁市的设计雨量,根据式 (3) 可以计算其暴雨衰减指数如表 3。

表 3 不同时间区间的 n_p 值

暴雨衰减指数	重现期/a			
	10	20	50	100
$n_{p(1,3)}$	0.4766	0.4735	0.4691	0.4659
$n_{p(3,6)}$	0.6024	0.6135	0.6232	0.6284
$n_{p(6,24)}$	0.7974	0.8049	0.8116	0.8153

已知 n_p 的前提下,各时段设计雨量可根据以下公式计算^[9]:

(1) $t_i = 1 \sim 3$ h

$$H_i = H_1 \cdot t_i^{1-n_p(1,3)} \text{ 或} \quad (4)$$

$$H_i = H_3 \cdot (t_i/3)^{1-n_p(1,3)}$$

(2) $t_i = 3 \sim 6$ h

$$H_i = H_3 \cdot (t_i/3)^{1-n_p(3,6)} \text{ 或} \quad (5)$$

$$H_i = H_6 \cdot (t_i/6)^{1-n_p(3,6)}$$

(3) $t_i = 6 \sim 24$ h

$$H_i = H_6 \cdot (t_i/6)^{1-n_p(6,24)} \text{ 或} \quad (6)$$

$$H_i = H_{24} \cdot (t_i/24)^{1-n_p(6,24)}$$

根据《浙江省可能最大暴雨图集》可知,将计算得出的各时段设计雨量的最大值放在峰值位置,次大降雨量放在最大值左边,其余时段雨量从大到小排序,奇数放在左边,偶数放在右边,当一边排满时其余的按从大到小全放到另一边。由宿迁市 36 a 的 24 h 的降雨过程计算得雨峰时刻平均值为第 10 h,由此得到设计雨型如图 3 所示。

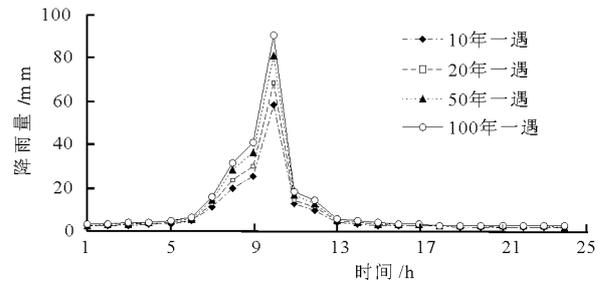


图3 宿迁市 24 h 设计雨型(暴雨衰减指数法)

2.4 PDF 法雨型

2.4.1 PDF 法雨型简介及参数推求 研究得知累积降雨曲线与累积分布函数(CDF) 形状相似,而累积分布函数(CDF) 的一次微分为概率密度函数(PDF),因此可用 PDF 来设计雨型。而且国外已经初步研究了用 PDF 来构建雨型,结果发现 Gumbel、Lognormal 和 Weibull 等概率密度函数可很好的反映降雨过程特征,适用于推求设计雨型^[4]。其具体型式如下:

(1) Gumbel 分布

$$f(x) = \frac{1}{\beta} e^{-\frac{x-\alpha}{\beta} - e^{-\frac{x-\alpha}{\beta}}} \quad -\infty < x < \infty \quad (7)$$

式中: α 与 β 为参数。

(2) Lognormal 分布

$$f(x) = \frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\ln(x)-\eta)^2}{2\sigma^2}}, x > 0 \quad (8)$$

式中: η 与 σ 为参数。

(3) Weibull 分布

$$f(x) = \frac{\gamma}{x} \left(\frac{x}{a}\right)^\gamma \cdot e^{-\left(\frac{x}{a}\right)^\gamma}, x \geq 0, \gamma, \alpha > 0 \quad (9)$$

式中: γ 与 α 为参数。

在已知雨峰时刻 T_p 、雨峰流量 Q_p 、降雨设计历时 T_d 、设计降雨量 Q_d 前提下,可推出 $f'(T_p) = 0$ 和 $f(T_p) = Q_p$;若设计流量的起始时刻比 T_p 提前 t 时刻,则 Q_d 就是从 $(T_p - t)$ 时刻到 $(T_p + T_d - t)$ 时刻的累计雨量,即 $Q_d = \int_{T_p-t}^{T_p+T_d-t} f(x) dt$ 。根据推理可用参

数分别表示 T_p 、 Q_p 、 Q_d 。

以 Gumbel 分布为例,公式如下:

$$T_p = \alpha \quad (10)$$

$$Q_p = \frac{1}{\beta} e^{-1} \quad (11)$$

$$Q_d = e^{\left\lfloor -e^{\left[-\frac{T_p + (T_d - t) - \alpha}{\beta} \right]} \right\rfloor} - e^{\left\lfloor -e^{\left(-\frac{T_p - t - \alpha}{\beta} \right)} \right\rfloor} \quad (12)$$

参数 α, β 要同时满足上述的 3 个目标函数,显然这是一个多元非线性方程组的求解问题,不能直接解出数值,需利用最优化算法进行求解。因此本文采用绝对值求和法,将多目标函数问题转化成单目标函数最优化问题,只要求解出绝对值之和最小时的参数即可,参数结果应满足下式:

$$\min Z = \text{abs}(T_p - \alpha) + \text{abs}\left(Q_p - \frac{1}{\beta} e^{-1}\right) + \text{abs}\left(Q_d - e^{\left\lfloor -e^{\left[-\frac{T_p + (T_d - t) - \alpha}{\beta} \right]} \right\rfloor} + e^{\left\lfloor -e^{\left(-\frac{T_p - t - \alpha}{\beta} \right)} \right\rfloor}\right) \quad (13)$$

2.4.2 粒子群优化算法 PDF 参数求解问题转化成了单目标函数 $\min Z$ 的最优化求解问题。粒子群算法(PSO)算法简单,求解速度快,适合求解实数问题,因此本文采用 PSO 对函数 $\min Z$ 进行最优化求解,解出 Z 最小时对应的参数结果。

粒子群优化算法采用速度-位置模型,每个粒子代表着参数解空间的一个,解的好坏程度由适应函数的结果来决定^[10]。本文的粒子群算法的学习因子取 $c_1 = c_2 = 2$ 。为了使粒子不远离解空间,粒子移动速度应控制在 $[-v_{\max}, v_{\max}]$,一般取 $v_{\max} = k \cdot v_{\max}$,本文取 $k = 0.5$ 。粒子在解空间不断更新迭代直到达到规定的迭代次数或达到规定的误差标准为止^[11]。

应用 matlab 进行粒子群算法编程,以宿迁市 2000 年的数据为例,计算出 T_p 、 Q_p 、 Q_d 的输入值,分别用 Gumbel、Lognormal 和 Weibull 概率密度函数来拟合 2000 年实测降雨过程,求解 $\min Z$ 最小,由求解的参数得拟合图如图 4 所示。

采用粒子群最优化算法分别拟合出每年的 Gumbel、Lognormal 和 Weibull 的分布曲线。以宿迁市 1981-2016 的实测降雨数据为基础进行函数间的拟合优度检验,选择出与实测数据拟合最好的函数。本文拟合优度检验采用 3 种方法^[12]:

(1) 拟优平方和准则法

$$RMSE = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x(i) - y(i))^2} \quad (14)$$

(2) 拟优绝对值准则法

$$MAE = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |x(i) - y(i)| \quad (15)$$

(3) 概率点据相关系数检验法

$$PPCC = \frac{\sum_{i=1}^n (x(i) - x_m)(y(i) - y_m)}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (x(i) - x_m)^2 \sum_{i=1}^n (y(i) - y_m)^2}} \quad (16)$$

式中: $x(i)$ 为函数拟合值; $y(i)$ 为实测样本值; x_m 为拟合值的均值; y_m 为样本值的均值。

由上述公式计算出 1981-2016 年优度检验均值,结果见表 4。拟合优度检验中 $RMSE$ 和 MAE 越小越优, $PPCC$ 越大越优。对于宿迁市实测数据来说, Gumbel 分布是最优分布,可作为其设计雨型。

表 4 拟合优度检验结果

分布曲线	RMSE	MAE	PPCC
Gumbel	0.055	0.030	0.701
Weibull	0.056	0.031	0.697
Lognormal	0.064	0.035	0.594

2.4.3 PDF 法设计雨型结果 选用 Gumbel 分布推求宿迁市设计雨型,由宿迁市 36 a 的 24 h 的降雨过程得雨峰时刻平均值为第 10 h,即输入值 $T_p = 10$ 。由宿迁市不同重现期下 24 h 设计雨量和最大 1 h 设计雨量(如表 2)得输入值 Q_p 、 Q_d 。运用粒子群算法计算 Gumbel 分布参数,得设计雨型如图 5 所示。

3 基于 Copula 函数设计雨型的比较分析

不同设计雨型的优劣没有固定的方法来判别,本文尝试利用 Copula 函数,从设计降雨总量分别与最大 1h 雨量、最大 3h 雨量、最大 6h 雨量间的风险联合分布概率入手,对上述 4 种雨型进行对比分析。

Copula 函数是定义在 $[0, 1]$ 区间均匀分布的联合概率分布函数^[13]。由宿迁市 36 a 实测数据得出变量间为正相关,故本文选取了 Gumbel-Hougaard Copula 函数来分析设计雨型。GH Copula 函数的表达式为:

$$C(u, v) = \exp\left\{-\left[(-\ln u)^\theta + (-\ln v)^\theta\right]^{\frac{1}{\theta}}\right\} \quad (17)$$

$$\theta \in [1, \infty]$$

式中: θ 为参数。

采用皮尔逊 III 型来计算边缘分布函数,由矩法得出 P-III 参数值见表 5,通过目估适线法可推求出不同降雨量对应的频率值(即 u, v 的值)。

Kendall 秩相关系数 τ 与 Copula 参数 θ 之间的关系: $\tau = 1 - \frac{1}{\theta}$,因此采用此相关性指标法计算参

数 θ 。Kendall 秩相关系数 τ 由下式计算^[14]：

$$\tau = \frac{2}{n(n-1)} \sum_{1 \leq i < j \leq n} \text{sign}(x_i - x_j)(y_i - y_j) \quad (18)$$

式中： (x_i, y_i) 、 (x_j, y_j) 分别为两组独立同分布的观测数据；sign 为符号函数。

表 5 P-III 边缘分布函数的参数值

降雨量	α	β	a_0
24 h 雨量	2.60	0.02	51.09
最大 1 h 雨量	3.56	0.10	-1.89
最大 3 h 雨量	2.73	0.05	6.48
最大 6 h 雨量	2.64	0.04	16.80

计算得 24 h 降雨量与最大 1、3、6 h 降雨量的 Kendall 秩相关系数 τ 分别为 0.5016、0.5952 和 0.6302，则对应 GH Copula 的参数 θ 分别为 2.01、2.47 和 2.7。

以 24 h 降雨量与最大 1 h 降雨量的 Copula 概率分布关系为例来详细介绍。采用 Genest - Rivest 法验证理论联合分布函数与经验联合分布函数的拟合程度，结果如图 6 所示。各点均匀的分布在 45° 线左右，则 GH Copula 具有良好的拟合度^[15-16]。

本文定义风险率为满足 24 h 设计降雨量条件下，最大 1h(或 3、6 h)降雨量超出对应设计时段降雨量发生的条件概率^[5]，计算公式如下式：

$$p(r_i > R_i | r \leq R) = \frac{p(r \leq R, r_i > R_i)}{p(r \leq R)} = \frac{F(R) - F(R, R_i)}{F(R)} \quad (1)$$

式中： R 为 24 h 设计降雨量，mm； R_i 为最大 1h(或 3、6 h)时段设计降雨量，mm； $F(R)$ 为设计降雨量 r 的分布函数； $F(R, R_i)$ 为 (R, R_i) 的联合分布函数。

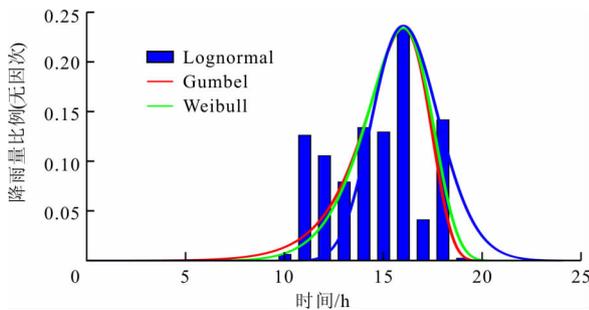


图 4 2000 年 3 个分布函数的拟合曲线图

根据 GH Copula 函数公式可计算出宿迁闸站 24 h 降雨量与最大 1 h 降雨量的不同组合下的联合分布概率 $F(R, R_i)$ ，以此可计算出其风险联合分布

概率^[17]，结果如图 7~8 所示。

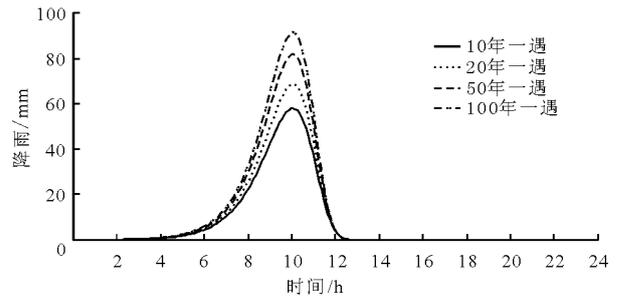


图 5 宿迁市 24 h 设计雨型(PDF 法雨型)

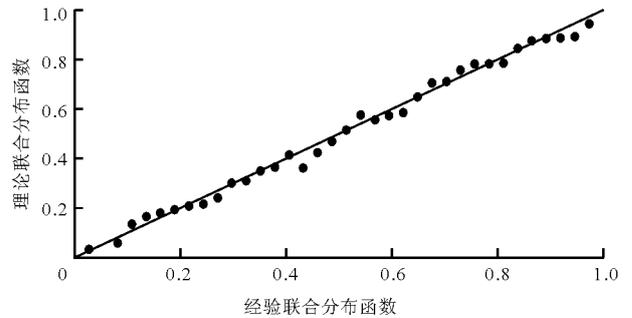


图 6 经验联合分布函数与理论联合分布函数

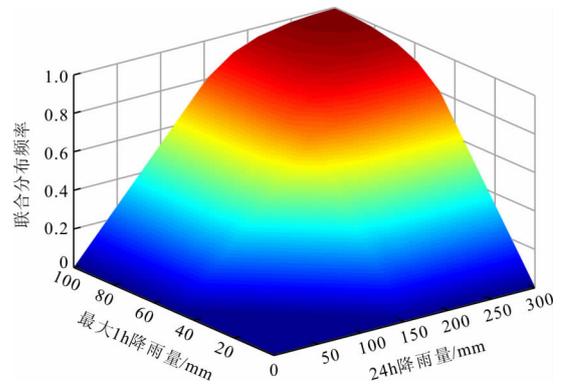


图 7 24 h 降雨量与最大 1h 降雨量的联合频率分布图

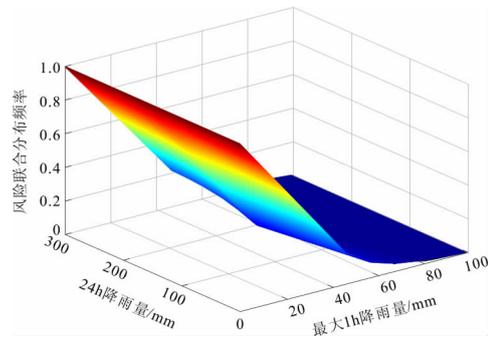


图 8 24 h 降雨量与最大 1h 降雨量的风险联合频率分布图

以宿迁市 50 年一遇的设计雨型为例，计算 4 种方法雨型的 24h 降雨量，最大 1、3、6 h 降雨量，见图 7~8，各自的风险联合分布概率，结果见表 6。在 24 h 设计雨量一定的条件下，时段最大降雨量越大，风险联合分布概率越小。

由表6可知:(1)同频率雨型和衰减指数法雨型都以P-III型曲线计算的设计降雨量为基础,风险联合分布概率相同,但同频率雨型雨峰偏后。(2)SCS雨型雨峰较大,24h与最大1h对应风险联合分布概率为0.0001(较小),较安全;24h与最大6h的风险

联合分布概率为0.010306,表明在最大6h时段的降雨不太集中。(3)PDF法雨型雨峰与同频率雨型一样,但24h和最大3、6h的风险联合分布概率都为0.0000001(最小),表明最大6h和最大3h的降雨较集中,设计雨型偏安全。

表6 50年一遇下4种雨型(风险)联合分布概率

雨型	联合分布概率			风险联合分布概率		
	24h与最大1h	24h与最大3h	24h与最大6h	24h与最大1h	24h与最大3h	24h与最大6h
同频率雨型	0.9720	0.9736	0.9742	0.008200	0.006522	0.005891
SCS雨型	0.9799	0.9735	0.9699	0.000100	0.006633	0.010306
衰减指数法雨型	0.9720	0.9736	0.9742	0.008200	0.006522	0.005891
PDF法雨型	0.9720	0.9800	0.9800	0.008200	0.0000001	0.0000001

4 结论

(1)暴雨衰减指数法和同频率法原理相近,是以时段设计降雨量为基础来设计雨型;SCS-II法是将美国的设计结果运用于宿迁市来设计雨型;PDF法是利用概率密度函数来设计雨型。本文尝试运用该3种新方法推求宿迁市设计雨型,其雨型结果相对于同频率雨型来说整体雨量过程相似,雨量偏差不大,结果合理,因此该方法可为宿迁市雨型的确定提供参考,也能为国内设计雨型的研究发展提供新思路。

(2)从Copula函数中的联合分布概率的思路出发,重新定义风险率,选用GH Copula函数计算风险联合分布概率来进行4种雨型的对比,来分析设计雨型的优劣,Copula函数可以作为雨型对比分析的一种方法。

参考文献:

- [1] 成丹,陈正洪,方怡.宜昌市区短历时暴雨雨型特征[J].暴雨灾害,2015,34(3):249-253.
- [2] 牟金磊.北京市设计暴雨雨型分析[D].兰州:兰州交通大学,2011.
- [3] 岑国平,沈晋,范荣生.城市设计暴雨雨型研究[J].水科学进展,1998(1):42-47.
- [4] 刘成林.城市排水防涝系统设计降雨时空分布特性研究[D].北京:北京工业大学,2015.
- [5] 杨星,朱大栋,李朝方,等.按风险率模型分析的设计雨型[J].水利学报,2013,44(5):542-548.
- [6] 闫鹏飞,孙静涛,冯晓宁.基于excel的水文频率曲线绘制方法[J].黑龙江交通科技,2013,36(11):111-112.
- [7] 汪明.雨水池设计理论研究[D].北京:北京工业大学,2008.
- [8] 张建平,朱友聪,朱骊.暴雨衰减指数在中小流域雨型设计中的运用探讨[J].中国农村水利水电,2013(7):75-77+80.
- [9] 胡琳琳,施征.暴雨衰减指数在短历时可能最大暴雨研究中的应用[J].浙江水利科技,2014,42(4):26-27+30.
- [10] 黄平.粒子群算法改进及其在电力系统的应用[D].广州:华南理工大学,2012.
- [11] 刘衍民.粒子群算法的研究及应用[D].济南:山东师范大学,2011.
- [12] 田风霞,赵传燕,冯兆东.黄土高原地区降水的空间分布[J].兰州大学学报(自然科学版),2009,45(5):1-5.
- [13] 邵卫云,黄宁,周永潮,等.基于双矩形雨型的降雨不均匀性和不确定性分析[J].科技通报,2017,33(2):13-17+23.
- [14] 施超,赵继超.基于Kendall τ 的风光出力相关性分析[J].中国科技信息,2016(23):74-75.
- [15] 韩晓庆. Copula函数的理论及其应用[D].温州:温州大学,2013.
- [16] 袁超,宋松柏.基于Copula函数的水文干旱联合概率分布研究[J].水利与建筑工程学报,2016,14(6):50-53.
- [17] 张翔,冉啟香,夏军,等.基于Copula函数的水量水质联合分布函数[J].水利学报,2011,42(4):483-489.