

硬夹层中静压桩沉桩桩端阻力分析

黄沛¹, 刘颖², 王孝贤¹

(1. 上海理工大学 土木工程系, 上海 200093; 2. 南昌工程学院 土木与建筑学院, 江西 南昌 330099)

摘要: 针对在含硬夹层地区的静压桩沉桩问题, 将桩端贯入过程按球孔扩张计算, 建立了基于统一强度理论、大变形假设并考虑土体剪胀性的同心分层球孔扩张问题弹塑性解析解。将数值计算结果与 ABAQUS 有限元分析结果比较, 验证了解答的正确性, 比较了与硬夹层中球孔扩张的差异并分析了桩端阻力的影响因素。结果表明: 内摩擦角比值对土层影响范围作用不大; 黏聚力比值对土层影响范围有显著影响, 随黏聚力比值增大, 土层影响范围明显减小; 随弹性模量比值增大, 土层影响范围则有增大的趋势, 土层软硬强度比值不能反映土层影响范围变化规律。

关键词: 静压桩沉桩; 硬夹层; 桩端阻力; 球孔扩张

中图分类号: TV553; TU473

文献标识码: A

文章编号: 1672-643X(2017)02-0227-06

Analysis of static pressure pile-sinking tip resistance in hard interlayer

HUANG Pei¹, LIU Ying², WANG Xiaoxian¹

(1. Department of Civil Engineering, University of Shanghai for Science and Technology, Shanghai 200093, China;

2. College of Civil Engineering and Architecture, Nanchang Institute Technology, Nanchang 330099, China)

Abstract: Aiming at the problems occurring in static pressure pile-sinking in hard multi-layered soils, an analytical solution of spherical cavity expansion in concentric layered soil was developed based on unified strength theory, large deformation hypothesis and dilatancy of soil. The simulation results were compared with the ABAQUS finite element analysis to verify the correctness of the solution. The hard interlayer expansion difference were compared, and the influence factors for cavity expansion pressure in concentric layered soil and horizontal layered soil were discussed. The results showed that, the internal friction angle ratio had no significant influence on the interface influence distance. The cohesion ratio had significant influence on soil influence scope. The larger the cohesion ratio between hard interlayer and soft soil, the less interface influence distance was. With the increase of elastic modulus ratio, the soil layer affected scope had an increase trend, the soil strength of hard and soft radius ratio can't not reflect soil layer affected scope.

Key words: static pressure pile-sinking; hard interlayer; pile tip resistance; spherical cavity expansion

1 研究背景

静压桩具有噪声小、施工方便、桩身质量可靠、承载能力高等优点, 受到越来越多的重视。在沿海地区的静压桩工程中常遇到软土中存在硬夹层的工程问题。当采用预制混凝土桩穿越一定厚度硬夹层时, 宜事先进行沉桩可行性分析, 选择合适的沉桩方法、桩身结构强度以及桩端入土深度, 并进行现场试沉桩验证。实践表明, 采用合适的方法预估沉桩阻力是判断沉桩可行性的一种有效措施, 因此如何确

定沉桩阻力, 具有重要意义。

目前, 学者们对静压桩沉桩阻力做了大量研究, 但是这些研究成果大多建立在桩周土体均质的假设上。张明义等^[1]根据静压桩的特点, 将沉桩桩端阻力和桩侧阻力分开计算, 建立了球孔扩张-滑动摩擦计算模式; 刘俊伟等^[2]采用源-源假设理论, 将沉桩过程视为半无限平面内的一系列球孔扩张, 并计算得出桩端阻力与桩侧阻力值; 胡永强等^[3]从摩擦学的角度定性地分析了桩侧摩阻力; 周航等^[4]基于圆孔扩张理论, 分析了沉桩深度、土体参数对楔形

收稿日期: 2016-11-14; 修回日期: 2017-01-09

基金项目: 江西省科技厅青年基金项目(20161BAB216107)

作者简介: 黄沛(1992-), 男, 江苏泰州人, 在读硕士研究生, 主要从事岩土力学方面的研究。

静压桩沉桩阻力的影响。

实际沉桩过程需要考虑不同土层之间的相互影响,当桩端附近土层性质发生突变时,沉桩阻力会发生剧烈变化,其中桩端阻力的变化尤为明显。李月健等^[5]采用体积权重法给出了成层土中静压桩桩端阻力及临界深度、最小厚度的计算公式;李镜培等^[6]也基于体积权重法,采用 SMP 屈服准则改进的剑桥模型,得到了较为准确的沉桩阻力计算结果。但是体积权重法并不能准确反映土层差异对桩端阻力的影响。工程中常用静力触探资料估算沉桩阻力,一些学者也致力于该方法中调节系数的研究。张明义等^[7-8]提出计算压桩力的综合调节系数法,还利用标贯击数估算沉桩阻力,标贯试验简单易行,该方法十分简便;李雨浓等^[9]依据静压桩实测压桩力与静力触探资料,提出了用平均比贯入阻力预估压桩力的经验公式。由于静力触探锥头与静压桩桩端存在尺寸效应,静力触探曲线并不能完全反映在含硬夹层土体中沉桩桩端阻力的变化规律,该方法也具有一定的局限性。

本文针对软土内存在硬夹层的情况,分析静压桩贯入到硬夹层中部位置时的桩端阻力(根据 Mo Pinqiang 等^[10]的研究成果,在不考虑土体自重应力的情况下,桩端位于夹层土中部位置时桩端阻力取得最值)。本文在 Mo Pinqiang 等^[10]研究的基础上,假定土体为理想弹塑性体,采用统一强度理论和不相关流动法则,考虑土体剪胀性,建立了同心分层球孔扩张弹塑性解答,并将该解答用于近似计算硬夹层土体中的桩端阻力。

2 土体模型

2.1 力学模型

如图 1 所示,较软土层中存在一定厚度 H (单位为 m) 的硬夹层,两种土层为水平分层。当静压桩桩端贯入到硬夹层中部位置时,将桩端附近的土体变形简化为球孔扩张,只考虑硬夹层土体 A 中以桩端为圆心、半径为 b_0 ($b_0 = 0.5 H$, 单位为 m) 的厚壁圆球状部分对扩张压力的影响,其外均为较软土体 B,形成了如图 2 所示同心分层的形式。图 2 中也给出了球孔在孔壁压力为 p_a (应力单位均为 MPa) 的作用下弹塑性区域分布。此时球孔从初始孔径 a_0 扩张至 a (单位为 m),外层土 B 内径随之从 b_0 扩张至 b (单位为 m),弹性区与塑性区以 c_A 和 c_B (单位为 m) 为界,边界处的径向应力定义为 p_{cA} 和 p_{cB} ,土中作用有初始应力 p_0 。

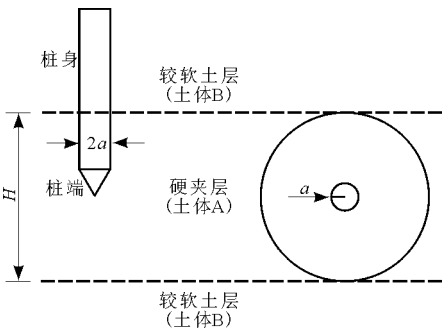


图 1 静压桩沉桩剖面示意图

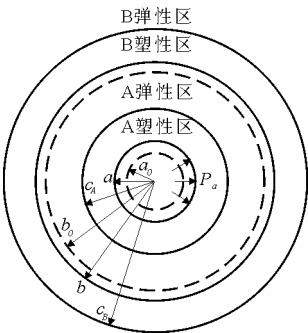


图 2 球孔扩张力学模型示意图

2.2 统一强度理论

对于性质迥异的两种土体,例如黏性土与砂土,采用单一计算准则很难适应本文所述夹层土的情况。统一强度理论^[11]将单剪、双剪等各类强度理论包含其中,有统一的数学表达式,可适用于各类材料。因此本文使用统一强度理论分析,屈服准则可写为:

$$\sigma_r - \alpha_i \sigma_\theta = y_i \tag{1}$$

式中:

$$\begin{cases} \alpha_i = \frac{1 + \sin\varphi_{ii}}{1 - \sin\varphi_{ii}} \\ y_i = \frac{2c_{ii}\cos\varphi_{ii}}{1 - \sin\varphi_{ii}} \\ \sin\varphi_{ii} = \frac{2(1+n)\sin\varphi_i}{2(1+n) + mn(\sin\varphi_i - 1)} \\ c_{ii} = \frac{2(1+n)c_i\cos\varphi_i}{2(1+n) + mn(\sin\varphi_i - 1)} \frac{1}{\cos\varphi_{ii}} \end{cases} \tag{2}$$

式中: i 取值 1、2 分别表示土体 A、B; c_{ii} 、 φ_{ii} 分别为统一强度理论中的统一黏聚力和统一内摩擦角,MPa、($^\circ$); c_i 、 φ_i 为材料的黏聚力和内摩擦角,MPa、($^\circ$); n 为反映中间主剪应力影响的权系数; m 为中主应力与大小主应力平均值之比。

3 球孔扩张解答

不计体力,整个土体将满足平衡方程:

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{2(\sigma_r - \sigma_\theta)}{r} = 0 \quad (3)$$

3.1 土体 A 弹性区

土体 A 弹性区范围: $c_A \leq r \leq b$ 。

弹性区内的径向应变 ε_r 、切向应变 ε_θ 可以用弹性区任一点径向位移 u (单位为 m) 与扩张后半径 r (单位为 m) 的函数来表示:

$$\varepsilon_r = -\frac{du}{dr}, \quad \varepsilon_\theta = -\frac{u}{r} \quad (4)$$

已有弹性力学球对称问题的应力表达式:

$$\begin{cases} \sigma_r = -\frac{E_1}{(1+\nu_1)(1-2\nu_1)}[(1-\nu_1)\varepsilon_r + 2\nu_1\varepsilon_\theta] + p_0 \\ \sigma_\theta = -\frac{E_1}{(1+\nu_1)(1-2\nu_1)}[\varepsilon_\theta + \nu_1\varepsilon_r] + p_0 \end{cases} \quad (5)$$

将公式(4)、(5)代入平衡方程(3),利用位移边界条件,得到如下解答:

$$\begin{cases} \sigma_r = -\frac{E_1}{(1+\nu_1)(1-2\nu_1)}[(1+\nu_1)D_1 - (2-4\nu_1)\frac{D_2}{r^3}] + p_0 \\ \sigma_\theta = -\frac{E_1}{(1+\nu_1)(1-2\nu_1)}[(1+\nu_1)D_1 + (1-2\nu_1)\frac{D_2}{r^3}] + p_0 \end{cases} \quad (6)$$

式中:

$$D_1 = \frac{(c_A - c_{A0})c_A^2 - (b - b_0)b^2}{c_A^3 - b^3}$$

$$D_2 = \frac{(c_{A0}b - c_A b_0)c_A^2 b^2}{c_A^3 - b^3}$$

弹性区内的位移关系式表示为:

$$u = D_1 r + \frac{D_2}{r^2} \quad (7)$$

3.2 土体 B 弹性区

土体 B 弹性区范围: $c_B \leq r$ 。

可将土体 B 的变形视为初始孔径为 b_0 的小孔扩张,弹性区内应力、位移表达式如下:

$$\begin{cases} \sigma_r = -\frac{E_2}{(1+\nu_2)(1-2\nu_2)} \cdot \left[(4\nu_2 - 2) \frac{(c_B - c_{B0})c_B^2}{r^3} \right] + p_0 \\ \sigma_\theta = -\frac{E_2}{(1+\nu_2)(1-2\nu_2)} \cdot \left[(1-2\nu_2) \frac{(c_B - c_{B0})c_B^2}{r^3} \right] + p_0 \end{cases} \quad (8)$$

$$u = \frac{(c_B - c_{B0})c_B^2}{r^2} \quad (9)$$

3.3 土体 A 塑性区

土体 A 塑性区范围: $a \leq r \leq c_A$ 。

联立平衡方程(3)和屈服准则(1),有:

$$\begin{cases} \sigma_r = -\frac{\gamma_1}{\alpha_1 - 1} - M_1 r^{-\frac{2(\alpha_1-1)}{\alpha_1}} \\ \sigma_\theta = -\frac{\gamma_1}{\alpha_1 - 1} - \frac{M_1}{\alpha_1} r^{-\frac{2(\alpha_1-1)}{\alpha_1}} \end{cases} \quad (10)$$

式中: M_1 为积分常数,通过如下边界条件确定:

$$\sigma_r|_{r=c_A} = p_{c_A}, \quad \sigma_r|_{r=a} = p_a \quad (11)$$

塑性区采用非相关关联流动法则,有:

$$\frac{\dot{\varepsilon}_r^p}{\dot{\varepsilon}_\theta^p} = \frac{\dot{\varepsilon}_r - \dot{\varepsilon}_r^e}{\dot{\varepsilon}_\theta - \dot{\varepsilon}_\theta^e} = -\frac{2}{\beta_1} \quad (12)$$

式中:

$$\beta_1 = \frac{1 + \sin\psi_1}{1 - \sin\psi_1}; \quad \psi_1 \text{ 为剪胀角, } (^\circ); \quad \dot{\varepsilon}_r^p, \dot{\varepsilon}_\theta^p \text{ 分别}$$

为径向、切向塑性应变。

积分并考虑初始边界条件,得到:

$$\beta_1 \varepsilon_r + 2\varepsilon_\theta = \frac{1}{E_1}[(\beta_1 - 2\nu_1)\sigma_r + 2(1 - \nu_1 - \nu_1\beta_1)\sigma_\theta - (\beta_1 + 2)(1 - 2\nu_1)p_0] \quad (13)$$

根据大变形理论,塑性区有:

$$\varepsilon_r = -\ln\left(\frac{dr}{dr_0}\right), \quad \varepsilon_\theta = -\ln\left(\frac{r}{r_0}\right) \quad (14)$$

式中: r_0 为塑性区任意一点的初始半径, m, 在扩张过程中由 r_0 扩张至 r 。

将式(10)、(14)代入式(13)得到:

$$\ln\left[\left(\frac{r}{r_0}\right)^{\frac{2}{\beta_1}} \cdot \frac{dr}{dr_0}\right] = \ln(\chi_1) + \mu_1 M_1 r^{-\frac{2\alpha_1-2}{\alpha_1}} \quad (15)$$

式中:

$$\chi_1 = \exp\left\{\frac{(\beta_1 + 2)(1 - 2\nu_1)[\gamma_1 + (\alpha_1 - 1)p_0]}{\beta_1 E_1 (\alpha_1 - 1)}\right\} \quad (16)$$

$$\mu_1 = \frac{[(\beta_1 - 2\nu_1)\alpha_1 + 2(1 - \nu_1 - \nu_1\beta_1)]}{E_1 \alpha_1 \beta_1} \quad (17)$$

将式(15)分离变量并积分,整理后得:

$$\frac{\chi_1 (c_{A0}^{\frac{\beta_1+2}{\beta_1}} - r_0^{\frac{\beta_1+2}{\beta_1}})}{\gamma_1 (-M_1)^{\gamma_1}} = \int_{p_{c_A} + \frac{\gamma_1}{\alpha_1-1}}^{\zeta} e^{\zeta \mu_1} \cdot \zeta^{-1-\gamma_1} d\zeta \quad (18)$$

式中: $\zeta = -M_1 r^{-\frac{2(\alpha_1-1)}{\alpha_1}}; \quad \gamma_1 = \frac{\alpha_1(\beta_1 + 2)}{2(\alpha_1 - 1)\beta_1}$ 。

则塑性区任意一点的位移表达式可以写为:

$$u = r - r_0 = r - c_A \left[\left(\frac{c_{A0}}{c_A} \right)^{\frac{\beta_1+2}{\beta_1}} - \frac{\gamma_1}{\chi_1} A(r) \right]^{\frac{\beta_1}{\beta_1+2}} \quad (19)$$

$$A(r) = \sum_{n=0}^{\infty} \begin{cases} \frac{2(\alpha_1 - 1)\mu_1^n \ln\left(\frac{c_A}{r}\right)}{n!\alpha_1 \left(p_{c_A} + \frac{\gamma_1}{\alpha_1 - 1}\right)^{-\gamma_1}} & n = \gamma_1 \\ \frac{\mu_1^n \left(p_{c_A} + \frac{\gamma_1}{\alpha_1 - 1}\right)^{\gamma_1} (c_A^{n-\gamma_1} - r^{n-\gamma_1})}{n!(n - \gamma_1)} & n \neq \gamma_1 \end{cases} \quad (20)$$

3.4 土体 B 塑性区

土体 B 塑性区范围: $b \leq r \leq c_B$

联立平衡方程(3) 与屈服准则(1), 有:

$$\begin{cases} \sigma_r = -\frac{\gamma_2}{\alpha_2 - 1} - M_2 r^{-\frac{2\alpha_2-2}{\alpha_2}} \\ \sigma_\theta = -\frac{\gamma_2}{\alpha_2 - 1} - \frac{M_2}{\alpha_2} r^{-\frac{2\alpha_2-2}{\alpha_2}} \end{cases} \quad (21)$$

通过边界条件可以确定:

$$M_2 = -\left(4G\delta_2 + p_0 + \frac{\gamma_2}{\alpha_2 - 1}\right)c_B^{\frac{2\alpha_2-2}{\alpha_2}} \quad (22)$$

式中:

$$\delta_2 = \frac{\gamma_2 + (\alpha_2 - 1)p_0}{2(\alpha_2 + 2)G_2}$$

由非相关联的流动法则可得:

$$\beta_2 \varepsilon_r + 2\varepsilon_\theta = \frac{1}{E_2} [(\beta_2 - 2\nu_2)\sigma_r + 2(1 - \nu_2 - \beta_2\nu_2)\sigma_\theta - (\beta_2 + 2)(1 - 2\nu_2)p_0] \quad (23)$$

将公式(14)、(21) 代入(23) 可得:

$$\ln\left[\left(\frac{r}{r_0}\right)^{\frac{2}{\beta}} \cdot \frac{dr}{dr_0}\right] = \ln(\chi_2) - \mu_2 \left(\frac{c_B}{r}\right)^{-\frac{2\alpha_2-2}{\alpha_2}} \quad (24)$$

式中:

$$\chi_2 = \exp\left\{\frac{(\beta_2 + 2)(1 - 2\nu_2)[Y_2 + (\alpha_2 - 1)p_0]}{\beta_2 E_2 (\alpha_2 - 1)}\right\} \quad (25)$$

$$\mu_2 = \frac{3\delta_2}{\beta_2(1 + \nu_2)(\alpha_2 - 1)} [\alpha_2\beta_2 + 2 - 2\nu_2(1 + \alpha_2 + \beta_2)] \quad (26)$$

将公式(24) 分离变量并积分, 得位移表达式:

$$u = r - \left[-\frac{\gamma_2}{\chi_2} A_2(r) + \left(\frac{c_{B0}}{c_B}\right)^{\frac{\beta_2+2}{\beta_2}}\right]^{\frac{\beta_2}{\beta_2+2}} \cdot c_B \quad (27)$$

式中:

$$A_2(r) = \sum_{n=0}^{\infty} \begin{cases} \frac{2\mu_1^n (\alpha_2 - 1) \ln\left(\frac{c_B}{r}\right)}{n!\alpha_2} & n = \gamma_2 \\ \frac{\mu_2^n \left[\left(\frac{c_B}{r}\right)^{\frac{2(\alpha_2-1)(n-\gamma_2)}{\alpha_2}} - 1\right]}{n!(n - \gamma_2)} & n \neq \gamma_2 \end{cases} \quad (28)$$

根据球孔扩张解答, 静压桩贯入土体中的桩端阻力可以由球孔表面应力积分获得:

$$Q = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} p_a a^2 \sin\varphi \cos\varphi d\theta d\varphi = \pi a^2 p_a \quad (29)$$

4 验证与分析

本文解答充分考虑了两种土体的相互作用对桩端阻力的影响, 若土体 A、B 物理力学参数取值相同, 则可退化到文献[12] 中的解答。为了进一步验证本文解答的正确性, 将本文理论计算结果与 ABAQUS 有限元模拟结果进行比较。

图3 为同心分层土球孔扩张有限元模型简图, 土体 A 外径为 3 m, 土体 B 为一个半径 15 m、高 30 m 的圆柱体, 小孔从初始孔径 $a_0 = 0.1$ m 扩张到 $a = 0.3$ m。两种土体的中主应力系数都取 $n = 0$, 服从摩尔库伦屈服准则。土体各项参数选取如下: 初始应力 $p_0 = 0.001$ MPa, 弹性模量 $E_1 = 50$ MPa、 $E_2 = 10$ MPa, 泊松比 $\nu_1 = \nu_2 = 0.2$, 黏聚力 $c_1 = c_2 = 0.01$ MPa, 内摩擦角 $\varphi_1 = \varphi_2 = 10^\circ$, 剪胀角 $\psi_1 = \psi_2 = 10^\circ$ 。

如图4 所示, 理论计算结果与数值模拟结果吻合程度较好, 由于受到较软土层 B 的影响, 扩张压力曲线随扩张率增大呈现先增后减的趋势。当 $a/a_0 = 1.4$ 时相差最大, 理论计算结果为 0.261 MPa, 数值模拟结果为 0.267 MPa, 两者误差仅为 2.3%。

图5 为硬夹层中球孔扩张模型简图, 通过 ABAQUS 有限元模拟小孔扩张过程, 并取孔周 5 点的扩张压力平均值作为硬夹层中球孔扩张压力。从图6 中可以看出硬夹层土体中球孔扩张压力比同心分层中的偏大, 这是由于简化了硬夹层土造成的。两条曲线的差值并不大, 当硬夹层厚度与桩径之比 $H/D = 12$ 时两者差值最大, 约为模拟结果的 12%, 可以接受。从图6 中还可以看出, 随硬夹层厚度增加, 扩张压力不断增大, 扩张压力的差值则先增大后减小。

本文主要讨论硬夹层土体弹性模量 E_1 、黏聚力 c_1 和内摩擦角 φ_1 对结果的影响。取硬夹层中心位置

处桩端阻力为 Q_a ,另取均质土体 A、B 中桩端阻力为 Q_A 、 Q_B ,并以此作为判断土层软硬程度的标准。定义桩端阻力比为 $\eta = (Q_a - Q_B)/(Q_A - Q_B)$,以 $\eta = 0.95$ 对应的硬夹层厚度作为桩端阻力的影响范围,并分析其影响因素。

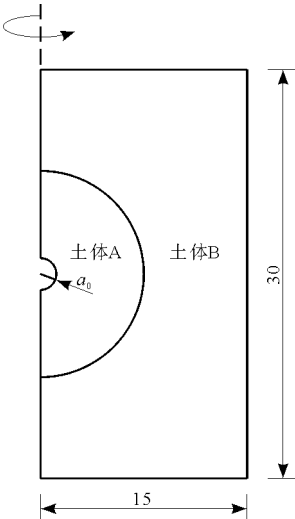


图 3 同心分层土体球孔扩张有限元模型简图(单位:m)

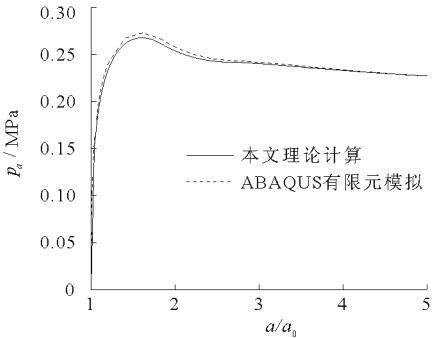


图 4 球孔扩张数值计算与有限元模型结果比较

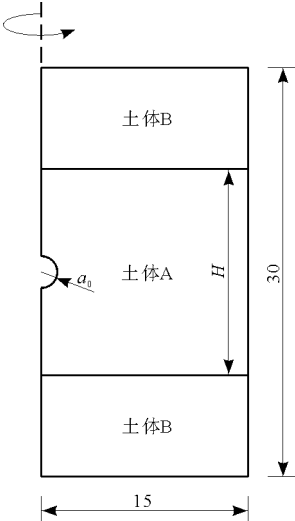


图 5 硬夹层土体球孔扩张有限元模型简图(单位:m)

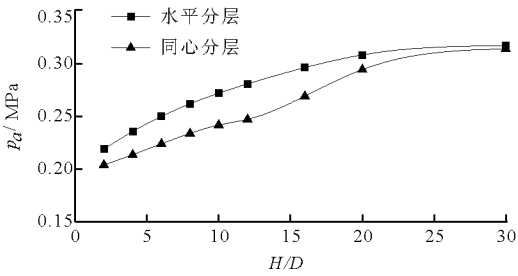


图 6 硬夹层与同心分层球孔扩张压力比较

保持较软土层参数不变,硬夹层与较软土层的弹性模量比值对桩端阻力比的影响如图 7 所示。从图 7 中可以看出,桩端阻力比随硬夹层厚度的增加不断增大。同一硬夹层厚度,弹性模量比值越小,桩端阻力比越大,且桩端阻力的土层影响范围随弹性模量比值的增大而增大。当夹层土的厚度较薄且小于土层影响深度时,在硬夹层中部位置的桩端阻力小于均质硬土中的桩端阻力。

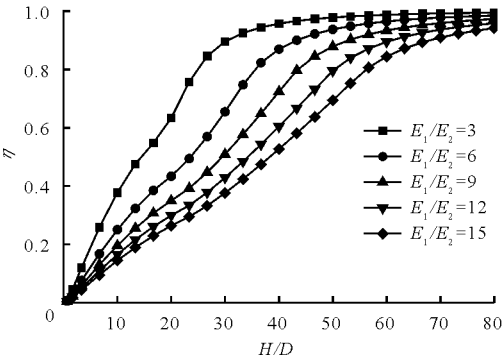


图 7 不同弹性模量比值对桩端阻力比的影响

图 8 给出了不同夹层土与较软土层黏聚力比值的桩端阻力比曲线。从图 8 可以看出,随黏聚力比值增大,桩端阻力比不断增大。图中黏聚力比值为 1、3、6、10、20 的土层影响范围分别为 32.8 D、17.4 D、12.7 D、10.3 D、7.9 D。可见黏聚力比对土层影响范围有显著影响,随黏聚力比值的增大,土层影响范围呈现减小的趋势,并且这种趋势随黏聚力比值的增大而减小。

图 9 中给出了夹层土与较软土层内摩擦角之比对桩端阻力比的影响。如图 9 所示,内摩擦角比值为 1、1.2、3、4、5 的情况下,土层影响范围分别为 32.8 D、31.1 D、28.6 D、28.9 D、29.8 D。可见,随内摩擦角比值的增大,土层影响范围呈现先减小后增大的趋势,并且内摩擦角比值对土层影响范围没有显著影响。综合以上分析,两种土体的软硬程度并不能完全反映桩端阻力的土层影响范围,需要综合土体各项参数分析。

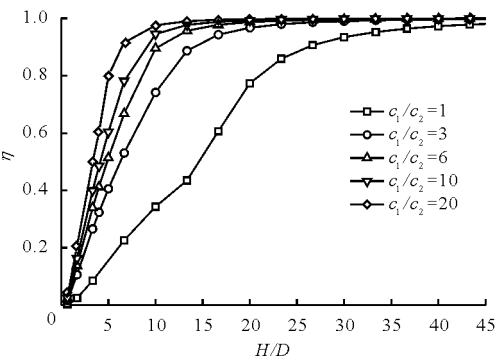


图8 不同黏聚力比值对桩端阻力比的影响

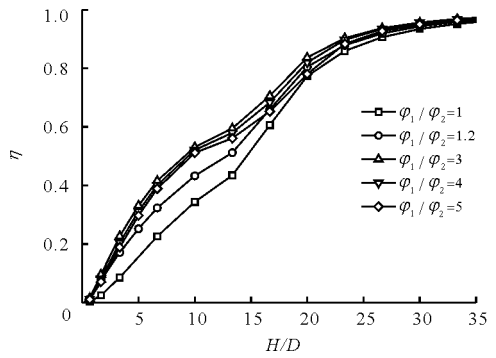


图9 不同内摩擦角比值对桩端阻力比的影响

5 结 论

针对在含硬夹层的地区静压桩沉桩问题,本文建立了考虑两种土体相互影响的同心分层球孔扩张解答,并应用到近似计算桩端阻力中,通过参数分析,得到如下结论:

- (1)黏聚力比值对土层影响范围有显著影响,随硬夹层与较软土层黏聚力比值增大,土层影响范围逐渐减小。而随弹性模量比值增大,扩张压力影响范围逐渐增大。
- (2)内摩擦角比值对土层影响范围没有显著影响,且随内摩擦角比值增大,土层影响范围先减小后增大。土体软硬强度差异不能反映土层影响范围的大小。

(3)本文仅能近似计算桩端位于硬夹层中部的桩端阻力,不能描述桩端穿透整个硬夹层过程中桩端阻力的变化。

参考文献:

[1] 张明义, 邓安福. 静压桩贯入地基的球孔扩张-滑动摩擦计算模式[J]. 岩土力学, 2003, 24(5): 701-704 + 709.

[2] 刘俊伟, 张明义, 赵洪福, 等. 基于球孔扩张理论和侧阻力退化效应的压桩力计算模拟[J]. 岩土力学, 2009, 30(4): 1181-1185.

[3] 胡永强, 汤连生, 李兆源. 静压桩桩-土界面滑动摩擦机制研究[J]. 岩土力学, 2015, 36(5): 1288-1294.

[4] 周航, 孔纲强, 刘汉龙. 基于圆孔扩张理论的静压楔形桩沉桩挤土效应研究[J]. 中国公路学报, 2014, 27(4): 24-30.

[5] 李月健, 陈云敏, 凌道盛. 静力压桩临界深度和最小厚度探讨[J]. 岩土工程学报, 2001, 23(5): 584-587.

[6] 李镜培, 李林, 孙德安, 等. 饱和软土地层静压沉桩阻力理论研究[J]. 岩土工程学报, 2015, 37(8): 1454-1461.

[7] 张明义, 刘俊伟, 王静静, 等. 计算静压桩沉桩阻力的综合调节系数法[J]. 重庆建筑大学学报, 2007, 29(6): 35-38.

[8] 张明义, 于素健, 周益众. 利用标贯击数估算静压桩的沉桩阻力[J]. 岩土力学, 2006, 27(2): 282-285.

[9] 李雨浓, 李镜培, 赵仲芳. 基于静力触探试验的静压桩沉桩阻力估算[J]. 路基工程, 2010(3): 67-69.

[10] Mo Pinqiang, Marshall A M, Yu H S. Elastic-plastic solutions for expanding cavities embedded in two different cohesive-frictional materials[J]. International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics, 2014, 38(9): 961-977.

[11] 俞茂宏. 线性和非线性的统一强度理论[J]. 岩石力学与工程学报, 2007, 26(4): 662-669.

[12] Yu H S. 岩土介质小孔扩张理论[M]. 北京: 科学出版社, 2013.