

重塑黄土与植物根系界面摩擦离散元分析

蒋明镜^{a,b,c}, 朱云刚^{a,b,c}

(同济大学 a. 土木工程防灾减灾国家重点实验室; b. 岩土及地下工程教育部重点实验室;
c. 土木工程学院, 上海 200092)

摘要: 油松作为一种植根于黄土地区的常见植物,在提高黄土强度方面起重要作用。为了弄清油松根系在黄土地区的固土效应,本文采用离散单元法(Distinct Element Method)模拟根系拉拔试验,分析了法向压力、根系埋深、含水率对根-黄土界面摩擦力学特性的影响。结果表明:拉拔试验中,根-黄土界面峰值强度、残余强度随着法向力的增大而增大;峰值强度、残余强度随着根系埋深的增加而增大;随着含水率的降低,根-黄土界面峰值强度、残余强度呈增大的趋势。

关键词: 植物根系; 重塑黄土; 离散单元法; 界面摩擦; 含水率

中图分类号: TU432

文献标识码: A

文章编号: 1672-643X(2017)02-0210-06

DEM analysis of the remoulded loess and root system interface friction

JIANG Mingjing^{a,b,c}, ZHU Yungang^{a,b,c}

(a. State Key Laboratory of Disaster Reduction in Civil Engineering; b. Key Laboratory of
Geotechnical and Underground Engineering of Ministry of Education; c. College of
Civil Engineering, Tongji University, Shanghai 200092, China)

Abstract: Pinus plays an important role in the reinforcement of loess strength because of its wide distribution in loess area. In order to investigate the fix-soil-effects of Pinus root system in loess area, a series of pull-out tests were carried out using the Distinct Element Method (DEM). The effects of normal stress, embedded depth and water content on the frictional mechanism of root-soil interface were analyzed. The results showed that, from the pull-out tests, the peak strength and residual strength of root-loess interface increased with the increases of normal stress and embedded depth, and with the decreases of water content.

Key words: root; remoulded loess; distinct element method; surface friction; water content

1 研究背景

近些年来,随着生态文明的建设,植物根系固土力学特性的研究已经成为一个热点。植物根系作为一种加筋材料被广泛应用于边坡治理^[1-2]。根土之间的相互运动引起根土之间摩擦作用,通过把土体中的剪应力转化为根系的拉应力,达到提高根土复合体抗剪强度的目的。根土复合体的抗剪强度主要取决于土体、根系以及根土之间的力学特性。不同的土体条件(围压、含水率、级配)与根系布置方式

对根土之间的力学特性有很大的影响^[3]。

以往学者对于根土界面的研究主要通过室内直剪试验、根系拉拔试验、三轴试验来进行。Ghestem等^[4]通过室内直剪试验研究了最能提高土体抗剪强度的植物根系分布特点,采取试验的植物为蓖麻、麻疯树、盐肤木。研究结果表明,根系提高了根土复合体的剪切强度、变形能,蓖麻由于直生根系的存在,最能提高土体抗剪强度。胡宁等^[5]对粉、细砂及小叶锦鸡儿,通过室内直剪研究在不同含水率条件下根系提高2种土壤的残余强度特性。结果表明,2种根-土

收稿日期:2017-01-12; 修回日期:2017-01-24

基金项目:国家自然科学基金项目(51579178)

作者简介:蒋明镜(1965-),男,江苏如皋人,博士,教授,博士生导师,主要从事天然结构性黏土、砂土、非饱和土、太空土、深海能源土宏观微观试验、本构模型和数值分析研究。

通讯作者:朱云刚(1992-),男,浙江金华人,硕士研究生,主要从事植物根系固土力学机理研究。

复合体的残余强度随垂直荷载而增加。刘小光等^[6]采用施加拔出荷载对油松单根进行直接拔出试验,分析了根系埋深对拔出过程和根土摩擦力的影响。研究表明,根系在拔出过程中有明显的阶段性特点,根土摩擦力随埋深而增大。Hamza 等^[7]进行了根系与橡胶制虚拟根拉拔试验,通过 PIV 进行图片分析,以此来分析植物根系在拉拔过程中产生的局部位移,更好地了解根系形状对荷载分布、变形的影响。李为萍等^[8]对柏根-沙复合体试样进行常规三轴试验,分析了不同根系分布形式及根系直径大小对根土复合体抗剪强度的影响。Zhang Chaobo 等^[9]为了评价植物根系对复合体抗剪强度的影响,进行了三轴压缩试验。采用的植物为刺槐根系,土为黄土,根系排列方式为水平、垂直、水平-垂直。研究表明,植物根能对复合体的黏聚力有较大的影响,复合体的内摩擦角没有多大变化;水平-垂直分布根系是最有效的,抗剪强度最大。

目前离散元计算方法^[10]由于成本低、过程易控且可重复性强也被广泛应用于根土力学特性的研究。Bourrier 等^[11]用离散元模拟室内直剪试验,研究了植物根系在砂土与黏性土中的力学响应。Mao Zhun 等^[12]用离散元数值方法和有限元数值方法模拟黏性土中直根系室内直剪试验,并且比较了两种计算方法的优劣。

然而,目前国际上对于特定土体中生长的根系离散元力学特性的研究却极为少见。由于油松在黄土地区具有分布广,适应性强的特点,本文考虑对重塑黄土中根系拉拔力学特性进行离散元模拟,通过离散元建立的重塑黄土模型、油松根系模型,分析了油松根系在重塑黄土试样中考虑不同法向压力、根系埋深、含水率下的根-黄土拉拔力学特性,从而为黄土地区造林工程提供理论支持。

2 离散元模型建立

2.1 重塑黄土模型的建立

黄土主要以粉土颗粒为主,呈非球形,并且界面粗糙。黄土多呈非饱和状态,颗粒之间存在范德华力、电子力和毛细力,使得黄土内部成架空结构,孔隙比较大。本文研究的对象为重塑黄土,为了考虑颗粒形状和界面粗糙造成的颗粒间抗转动能力,采用三维抗转动接触模型^[13],通过引入粒间黏聚力考虑颗粒间的范德华力、电子力和毛细力等作用力,以模拟黄土的宏观力学特性,采用接触模型如图1所示。

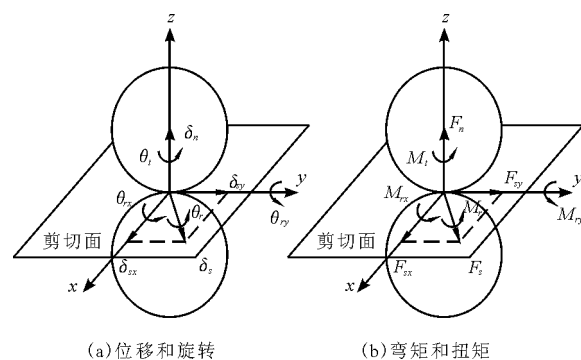


图1 黄土颗粒接触模型图

黄土接触模型法向力计算公式:

$$F_n = k_n u_n - F_a \quad (1)$$

式中: F_n 为粒间法向力, N; k_n 为颗粒法向刚度, N/m; u_n 为颗粒重叠量, m; F_a 为粒间黏聚力, N。其中:

$$F_a = \sigma_a d_{50}^2 = \left(\frac{S_u}{\xi_a (1 + (S_u/a_{st})^b)^{1-1/b}} + \sigma_{van} \right) d_{50}^2 \quad (2)$$

式中: σ_a 为黏聚力系数, N/m²; d_{50} 为中值粒径, m; S_u 为基质吸力, kPa; σ_{van} 为范德华力系数, 取为 4 kPa; a_{st} 为拟合参数取为 10.7 kPa; b 为拟合参数, 取为 1.6; ξ_a 为拟合参数, 取为 0.24。

由于考虑到黄土的非饱和特性, 本文对有效饱和度和与基质吸力的关系采用下式:

$$S_e = \frac{1}{(1 + (s_u/a_{sw})^b)^{1-1/b}} \quad (3)$$

式中: S_e 为有效饱和度, $a_{sw} = 400e^{-4.7e}$ 与孔隙比呈指数关系; b 为拟合参数, 取为 1.6。在常含水率三轴剪切 DEM 模拟过程中, 基质吸力由公式(3)计算得到, 同时可得到公式(2)中的 F_a , 随着重塑黄土试样剪切过程中的孔隙比发生改变, 每隔一定计算步数对 F_a 进行更新。

黄土接触模型切向力计算公式:

$$F_s = F_s - k_s \Delta \delta_s \quad (4)$$

式中: F_s 为粒间切向力, N; k_s 为粒间切向刚度, N/m; $\Delta \delta_s$ 为粒间切向相对位移增量, m。颗粒之间的摩擦力达到极限库仑准则时滑动才会发生, 此时 $F_s = \mu (F_n + F_a)$, μ 为粒间摩擦系数。

黄土接触模型弯矩按下式计算:

$$M_r = M_r - k_r \Delta \theta_r \quad (5)$$

式中: M_r 为粒间弯矩, N·m; $k_r = 0.25k_n R_c^2$ 为转动刚度, N·m; $\Delta \theta_r$ 为颗粒转动角增量, rad。当弯矩达到极限值时, 颗粒滚动才会发生, 此时弯矩为 $|M_r|$

$\leq 0.25\xi_c R_c(F_n + F_a)$; ξ_c 为粒间局部破碎系数, 取为 2.1; $R_c = \beta R$ 为接触半径, m; 其中 $R = 2R_1R_2/(R_1 + R_2)$, m; β 为抗转动系数。

黄土接触模型扭矩计算公式:

$$M_i = M_{li} - k_i \Delta \theta_i$$

(6)

式中: M_{li} 为粒间扭矩力, $\text{N} \cdot \text{m}$; $k_i = 0.5k_sR_c^2$ 为扭转刚度, $\text{N} \cdot \text{m}$; $\Delta \theta_i$ 为相对扭转角, rad。只有当颗粒之间的扭矩达到极限值时, 颗粒之间才会发生扭动, 如 $M_i \leq 0.65\mu R_c(F_n + F_a)$ 。

本文采用分层欠压法^[14]生成一个 40 000 颗粒的试样, 共分成 5 层, 每层 8 000 颗粒, 1~5 层相应的孔隙比分别为 1.01、1.007、1.006、1.006、0.95。并且引入粒间范德华力、抗转动系数形成整体孔隙比为 0.95 的松样, 试样长×宽×高为 6.6 m×6.6 m×6.6 m。为了节省计算时间以及避免数据误差, 本文将模拟的重塑黄土粒径设置为 0.09~0.4 m, 重塑黄土颗粒级配如图 2 所示。黄土试样微观参数如表 1 所示。

制样完成后, 在 12.5 kPa 法向压力下侧限压缩固结, 模拟原位应力状态。同时将吸力模型引入到 PFC3D 中, 进行两种常含水率下排气不排水三轴剪切试验, 本文所施加的围压分别为 50、100、200 和 300 kPa, 由于考虑到对不同含水率黄土进行根系拉拔试验, 因此初始吸力分别设置为 5 kPa

和 15 kPa, 对应的含水率分别为 27% 和 18%。相对应的应力应变曲线、体变关系分别如图 3、图 4 所示。由图 3(a)、3(b) 可见, 随着围压的增加, 应力应变关系呈硬化的趋势, 偏应力随轴向应变的增加而增加, 然后趋于稳定。由图 4(a)、4(b) 可见, 两种含水率情况下, 重塑黄土的剪缩性差别不大, 低含水率下更容易发生剪胀。两种含水率重塑黄土强度包线如图 5 所示。由图 5 可见, 低含水率下黄土的内摩擦角差别不大, 但是黏聚力增大, 这说明了含水率主要对黄土的黏聚力产生影响。两种不同含水率下黄土的强度指标如表 2 所示。

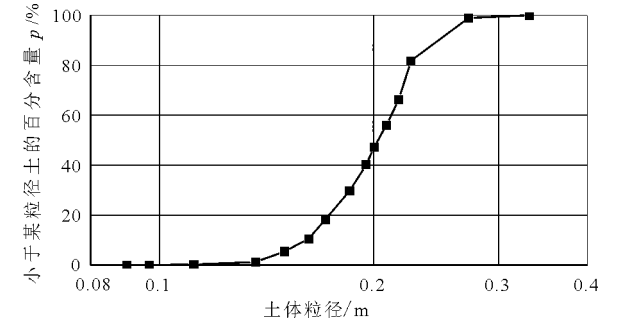


图2 重塑黄土颗粒级配图

表1 重塑黄土微观参数

密度/ ($\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$)	E / MPa	μ	β	ξ	σ_{van} / kPa	颗粒法切向 刚度比 k^*
2710	800	0.5	0.21	2.1	4	1.5

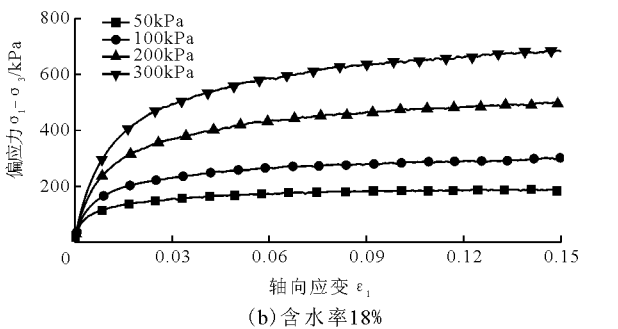
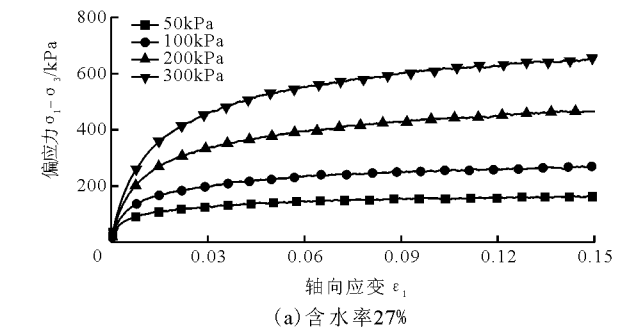


图3 重塑黄土三轴剪切试验应力-应变图

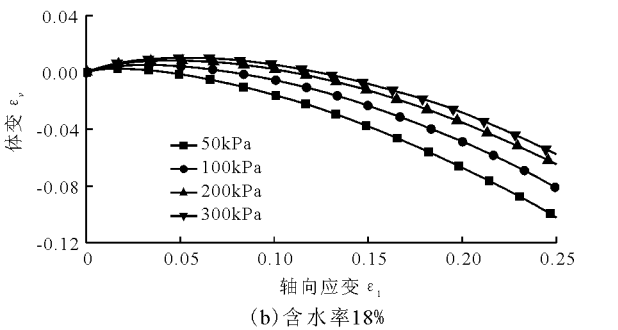
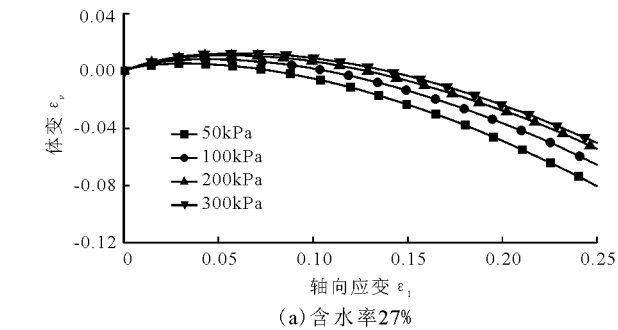


图4 重塑黄土三轴剪切试验体变图

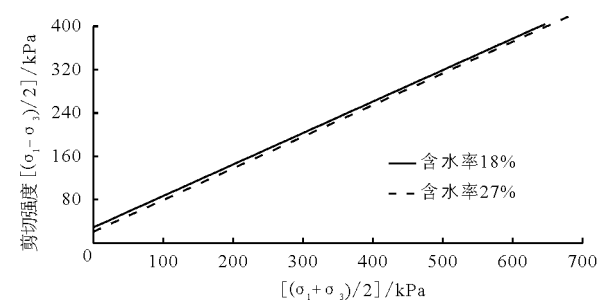


图 5 重塑黄土强度包线

表 2 重塑黄土强度指标		
黄土强度指标	含水率 27%	含水率 18%
黏聚力/kPa	20.8	28.6
内摩擦角/(°)	30.0	30.1

2.2 根系模型的建立

本文采用油松根系进行研究。根系模型如图 6 所示,采用的胶结模型为 PFC 自带的平行连接胶结模型。通过室内根系拉伸试验资料,油松根系的轴向拉伸模量为 500 MPa,轴向拉伸强度为 15 MPa^[15]。本研究进行了一系列离散元根系拉伸试验,通过选取合适的微观参数来反映油松根系的宏观力学特性。

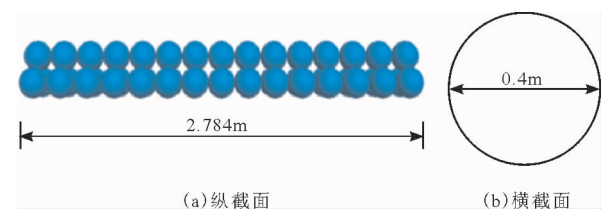


图 6 初始根系模型

表 3 根系初始微观参数		
密度/ (kg · m ⁻³)	颗粒法向刚度/ (N · m ⁻¹)	颗粒切向刚度/ (N · m ⁻¹)
248	1.8 × 10 ⁷	1.2 × 10 ⁷

初始模拟根系长度为 2.784 m,横截面直径为 0.4 m,根系生成后先不施加胶结模型,此时根系初始微观参数如表 3 所示。本文首先删除一部分侧墙

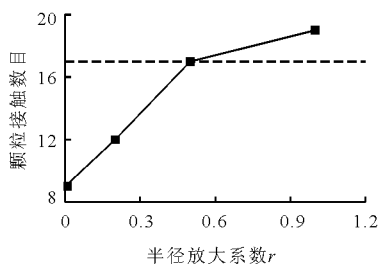


图 8 根土接触点数

以及根系埋放位置处的颗粒,然后生成根系颗粒。考虑到这会使得根系黄土界面接触点数目过少,引发土拱效应,不能完全发挥根系的加固作用,此时相当于土中根系未生长膨胀阶段,根系周围存在着大孔隙。为了模拟根系通过挤土效应膨胀生长,同时挤密周围土体,消除拱效应,采用根系半径扩大的方法,使根系黄土接触点数目达到某一理想值。选取了 1.2 倍、1.5 倍、2 倍根系半径扩大倍数。由于半径扩大过程中,根土产生的附加膨胀力使根系埋深部分产生根系变形,而在室内拉拔试验中无活性根系不存在弯曲情况,为了消除这个影响,同时为了消除根系内部的重叠量,采用根系扩大倍数后,将各排颗粒沿着 x、y、z 方向施加一个恒定的速度,循环一定步数,使 x、y、z 方向重叠量降低为 0。具体示意图如图 7 所示。

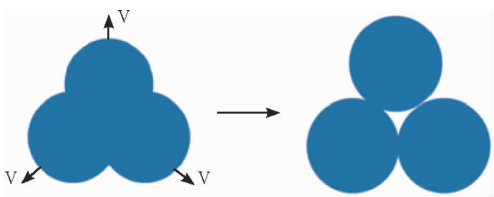


图 7 根细颗粒运动示意图

通过选取的 3 个半径扩大倍数 1.2、1.5、2.0,分别统计根土接触点数,选取合适的半径扩大倍数,根系与土颗粒之间的接触点数如图 8 所示。本文采用扩大倍数为 1.5。由于胶结强度决定了根系拉伸强度,首先选取了 4 组不同胶结强度的根系,进行拉伸试验,结果如图 9(a)所示,拉伸应力随着拉伸应变线性增加,当胶结破坏发生时,根系拉伸应力降低为 0。根系峰值拉伸应力随胶结强度的增加而增加。拉伸峰值应力与胶结强度的关系如图 9(b)所示,结果显示拉伸峰值应力与胶结强度之间呈线性关系。对应宏观根系拉伸应力,本文选取胶结强度为 23 MPa。由于 DEM 模拟过程中根系拉伸变形过大,与室内试验拉伸变形不一致,因此本文只考虑油松-黄土的界面摩擦特性的模拟,将根系的拉伸模量设置为无穷大。最终根系模型微观参数如表 4 所示。

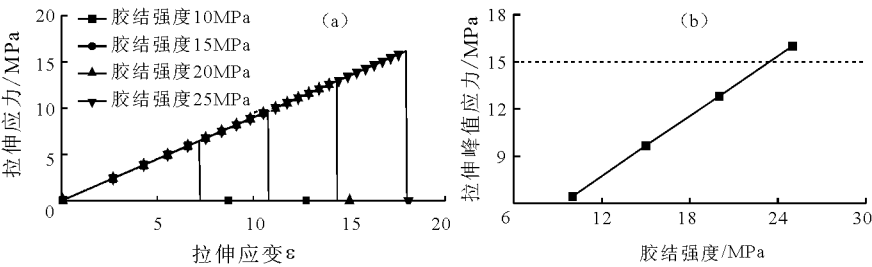


图 9 根系拉伸模拟图

表 4 根系模型微观参数

密度/ ($\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$)	直径/ m	长度/ m	颗粒法向刚度/ ($\text{N} \cdot \text{m}^{-1}$)	颗粒切向刚度/ ($\text{N} \cdot \text{m}^{-1}$)	胶结切向刚度/ ($\text{Pa} \cdot \text{m}^{-1}$)	胶结法向刚度/ ($\text{Pa} \cdot \text{m}^{-1}$)	胶结半径 系数	胶结拉伸 强度/MPa	胶结剪切 强度/MPa
373	0.6	4.17	1.8×10^7	1.2×10^7	9×10^{10}	9×10^{10}	1	23	23

3 离散元模拟拉拔试验

3.1 根系不同界面摩擦系数下拉拔试验模拟

选取根系界面摩擦系数 μ 分别为0.5,0.8,1.0,进行了3组离散元拉拔试验。模拟结果如图10(a)所示,3组拉拔试验分别体现了3个阶段,在拉拔应力初始上升阶段,根系与黄土发生相互错动,这个阶段摩擦力随着滑移的增大而增大;在拉拔应力下降阶段,由于根土界面的连接结构发生破坏,根土接触面积减少,摩擦力也随着滑移的增大而急剧下降;在平缓阶段,由于根系与土体之间的连接全部破坏,摩擦力随着滑移的增大

趋向于一个残余值^[6]。数据波动加大的原因是模拟根系界面并不是水平所导致的。

如图10(b)所示,随着根系界面摩擦系数的增加,峰值拉拔应力也增加,主要是增大了初始根土界面的摩擦力。图10(c)结果表明,根系拉拔残余强度也随着根系界面摩擦系数的增大而增大。在拉拔过程当中,峰值摩擦应力远低于根系拉拔强度,根系并没有呈现被拉断的现象。拉拔过程中峰值应力、残余应力处的根土颗粒接触点数如图10(d)所示。考虑到黄土颗粒在根系界面附近破坏,本文选取根系界面摩擦系数为0.5^[12]。

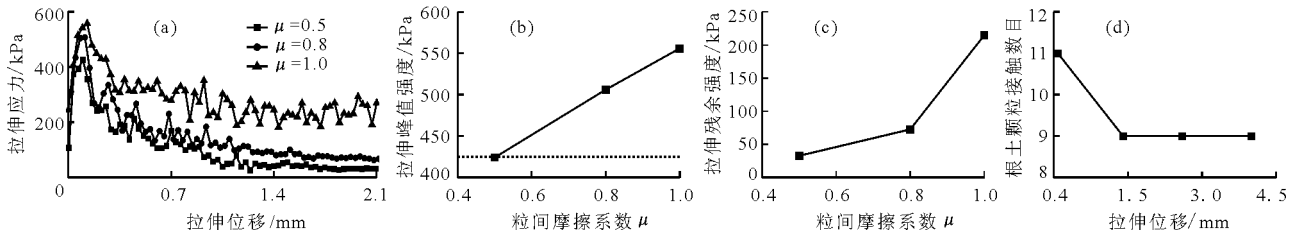


图 10 不同摩擦系数根系拉拔试验图

3.2 不同法向应力下根系拉拔试验离散元分析

本文所采用根系埋深为1 m,法向应力分别为12.5、100和200 kPa。根系植入方法为删除根系埋入位置处的颗粒,通过根系膨胀1.5倍消除拱效应的存在。在根系自由端施加一个恒定速度0.1m/s,并且记录根系自由端的阻力,该阻力即为根系埋深处的摩擦力。模型具体示意图及拉拔曲线如图11(a)所示。由图11(b)可知,拉拔曲线在不同法向应力下呈现3个不同的阶段,即拉拔应力上升段、下

降段和平缓段。随着拉伸位移的增加,拉伸峰值应力先增加后减小,存在峰值应力与残余应力,且峰值应力大于残余应力,远小于根系拉伸强度23 MPa,根系呈滑移形式被拉出。拉伸峰值应力随着法向应力的增加而增加,结果如图11(c)所示。残余峰值应力随着法向应力的增加而增加,结果如图11(d)所示。其原因主要是因为随着法向压力的增加,传递到根系界面的应力也逐渐增加,提升了根系界面的摩擦强度。

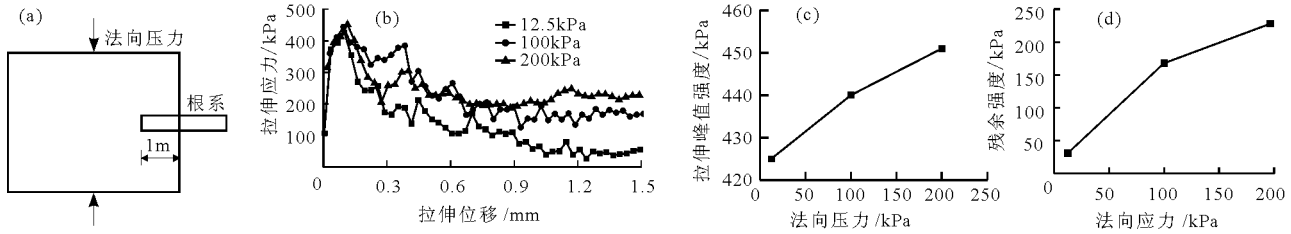


图 11 不同法向应力下根系拉拔图

3.3 不同埋深下根系拉拔试验离散元分析

本文所采用根系埋深分别为1.0,1.7,2.4 m。法向应力为12.5 kPa。根系具体植入、拉拔方法与

上一节所述相同,拉拔曲线如图12所示。图12(a)为拉拔曲线在不同埋深下力学响应。随着拉伸位移的增加,拉伸峰值应力先增加后减小,存在峰值应力

与残余应力,且峰值应力大于残余应力,远小于根系拉伸强度 23 MPa,根系呈滑移形式被拉出。拉伸峰值应力随着埋深的增加而增加,其结果如图 12(b)所示;残余峰值应力随着埋深的增加而增加,其结果如图 12(c)所示。

3.4 不同含水率下根系拉拔试验离散元分析

分别选取两种含水率 18% 和 27% 进行了根系拉拔试验。通过在不同法向应力、同一根系埋深

1 m情况下进行离散元对比分析,结果如图 13 所示。随着根系拉拔位移的增加,拉拔曲线成 3 个阶段;18% 含水率黄土较 27% 含水率黄土试样的拉拔峰值应力与残余应力都有所增加,且随着法向应力的增加,两种试样的峰值应力与残余应力呈现逐渐增加的趋势;18% 含水率黄土较 27% 含水率试样的峰值强度与残余强度差值分别随着法向压力的增加而增加,如图 14 所示。

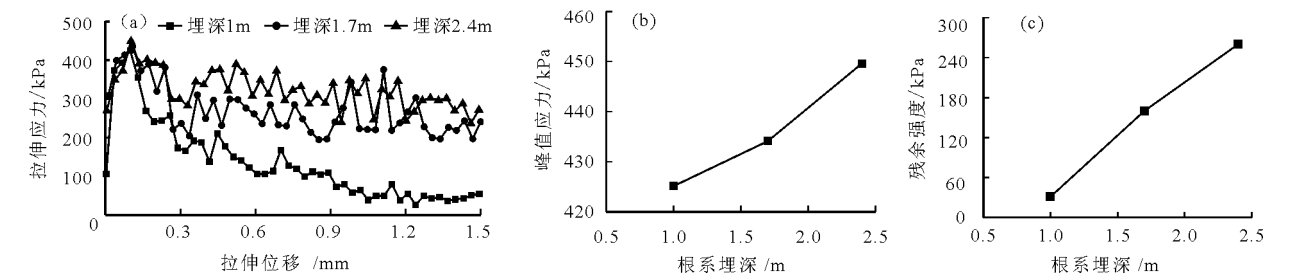


图 12 不同埋深下根系拉拔试验离散元分析

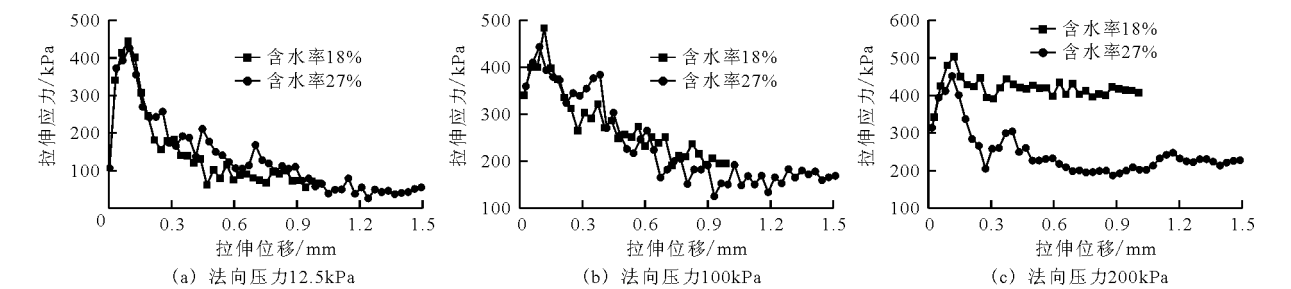


图 13 不同含水率下根系拉拔试验离散元分析

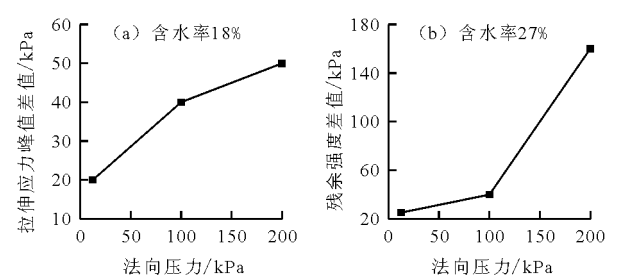


图 14 不同含水率下根系拉拔试验强度差值

4 结 论

本文通过离散元数值模拟方法研究了重塑黄土中根系的拉拔力学特性,得到结论如下:

(1)考虑活性根系的拉拔峰值应力与残余应力随着法向压力的增加而增加,同时随着根系埋深的增加而增加,该模拟结果与胡宁等^[5]、刘小光等^[6]无活性根系室内拉拔试验结果一致。

(2)随着含水率的降低,在某一法向压力下根系拉拔试验的峰值应力与残余应力均呈现增加的趋势,该结果印证了张兴玲等^[1]室内试验结果;低含水率黄土试样的峰值强度与残余强度较高含水率黄土试样的差值均随法向应力的增加而增加。

(3)本文对植物根系进行膨胀处理,模拟活性根系通过挤土消除拱效应,该处理有别于其他学者关于无活性根的拉拔研究,对黄土油松覆盖区域固土效应分析具有指导性意义,且为本团队接下来进行的根系生长力学特性分析提供理论基础。

参考文献:

[1] 张兴玲, 胡夏嵩, 毛小青, 等. 青藏高原东北部黄土区护坡灌木柠条锦鸡儿根系拉拔摩擦实验研究[J]. 岩石力学与工程学报, 2011, 30(S2): 3739–3745.

[2] 张超波, 陈丽华, 刘秀萍. 黄土高原刺槐根系固土的力学增强效应评价[J]. 水土保持学报, 2009, 23(2): 57–60.

[3] Meijer G J, Bengough A G, Knappett J A, et al. Comparison of new in situ root-reinforcement measuring devices to existing techniques [C]// Proceedings of the XVI EC-SMGE, 2015, doi: 10.1680/ecsmge.60678.

- 243.
- [7] 苏伟, 窦天军, 潘社奇, 等. 沸石对溶液中铈离子的吸附性能[J]. 材料科学与工程学报, 2011, 29(4): 592 – 595.
- [8] 张平萍, 陈雪刚, 程继鹏, 等. 以坡缕石为原料制备方沸石[J]. 材料科学与工程学报, 2010, 28(4): 501 – 504.
- [9] Shabani K S, Ardejani F D, Badii K, et al. Preparation and characterization of novel nano-mineral for the removal of several heavy metals from aqueous solution: batch and continuous systems [J]. Arabian Journal of Chemistry, 2013, 12(1): 1 – 20.
- [10] 马先伟, 李静, 武双磊, 等. 含铬熟料的烧成、水化及其浸出毒性[J]. 材料科学与工程学报, 2015, 33(6): 795 – 799.
- [11] 吕焕哲, 张建新. 黏土矿物原位修复 Cd 污染土壤的研究进展[J]. 中国农学通报, 2014, 30(12): 24 – 27.
- [12] Li Jiaxing, Hu Jun, Sheng Guodong, et al. Effect of pH, ionic strength, foreign ions and temperature on the adsorption of Cu(II) from aqueous solution to GMZ bentonite [J]. Colloids & Surfaces A: Physicochemical & Engineering Aspects, 2009, 349(1–3): 195 – 201.
- [13] Naseem R, Tahir S S. Removal of Pb(II) from aqueous/acidic solutions by using bentonite as an adsorbent [J]. Water Research, 2001, 35(16): 3982 – 3986.
- [14] Tahir S S, Naseem R. Removal of Cr(III) from tannery wastewater by adsorption onto bentonite clay [J]. Separation & Purification Technology, 2007, 53(3): 312 – 321.
- [15] Poon C S, Peters C J, Perry R, et al. Mechanisms of metal stabilization by cement based fixation processes [J]. Science Total Environment, 1985, 41(1): 55 – 71.
- [16] 袁玲. MSWI 飞灰在水泥基材料中的资源化利用及重金属的影响与控制研究[D]. 上海: 同济大学, 2004.

(上接第 215 页)

- [4] Ghestem M, Veylon G, Bernard A. Influence of plant root system morphology and architectural traits on soil shear resistance[J]. Plant and Soil, 2014, 377(1): 43 – 61.
- [5] 胡宁, 刘静, 张永亮, 等. 含水率对 2 种根 – 土复合体残余强度的影响[J]. 江苏农业科学, 2013, 41(12): 337 – 340.
- [6] 刘小光, 冀晓东, 赵红华, 等. 油松根系与土壤摩擦性能研究[J]. 北京林业大学学报, 2012, 34(6): 63 – 67.
- [7] Hamza O, Bengough A G, Bransby M F, et al. Mechanics of root-pullout from soil: A novel image and stress analysis procedure[J]. Eco-and Ground Bio-Engineering: The use of vegetation to improve slope stability. 2007: 213 – 221.
- [8] 李为萍, 史海滨, 梁建财, 等. 基于三轴试验的根土复合体抗剪性能试验研究[J]. 灌溉排水学报, 2013, 32(2): 128 – 130.
- [9] Zhang Chaobo, Chen Lihua, Liu Yaping, et al. Triaxial compression test of soil-root composites to evaluate influence of roots on soil shear strength[J]. Ecological Engineering, 2010, 36(1): 19 – 26.
- [10] Cundall P A, Strack O D L. The distinct numerical model for granular assemblies[J]. Géotechnique. 1979, 29(1): 47 – 65.
- [11] Bourrier F, Kneib F, Chareyre B, et al. Discrete modeling of granular soils reinforcement by plant roots[J]. Ecological Engineering, 2013, 61(1): 646 – 657.
- [12] Mao Zhun, Yang Ming, Bourrier F, et al. Evaluation of root reinforcement models using numerical modeling approaches[J]. Plant and soil, 2014, 381(1): 249 – 270.
- [13] Jiang Mingjing, Shen Zhifu, Wang Jianfeng. A novel three-dimensional contact model for granulates incorporating rolling and twisting resistance [J]. Computers and Geotechnics, 2015, 65: 147 – 163.
- [14] Jiang M J, Konrad J M, Leroueil S. An efficient technique for generating homogeneous specimens for DEM studies [J]. Computers and Geotechnics, 2003, 30(7): 579 – 597.
- [15] 周朔. 林木根系拉伸力学特性研究[D]. 北京: 北京林业大学, 2011.