

变步长四阶龙格库塔方法在水文水力计算中的应用

梁建, 李宝春, 祁涛, 卢俊

(安徽省·水利部淮委水利科学研究院, 安徽 合肥 230088)

摘要: 将变步长四阶龙格库塔方法用于水库调洪演算与水面线的计算中。变步长龙格库塔方法,可以有效地避免峰值的错过。以安徽省小水库除险加固工程为例,对该水库采用传统试算方法和变步长龙格库塔方法进行调洪演算和水库溢洪道水面线计算,分别得到了下泄洪水过程线、水位变化过程曲线和溢洪道水面线。结果表明:本方法易于程序设计,精度满足工程要求,可以用于水文水力计算中微分方程的求解。

关键词: 水库调洪; 水面线计算; 水文水力计算; 变步长龙格库塔

中图分类号: P333.1

文献标识码: A

文章编号: 1672-643X(2015)03-0161-04

Application of varying step four order Runge-Kutta method in calculation of hydrologic and hydraulic engineering

LIANG Jian, LI Baochun, QI Tao, LU Jun

(Institute of Hydraulic Research of Huaihe River Committee of Anhui Province & Ministry of Water Resources, Hefei 230088, China)

Abstract: A novel method of fourth order Runge - Kutta with variable step is applied in calculating the flood routing and water line in reservoir. In comparison with the traditional trial method through solving hydraulic differential equations, The method can effectively avoid missing the peak. Taking a reinforcement project of a small reservoir in Anhui as an example, the paper calculated flood routing and water line of the spillway by using tradition method and varying step four order Runge - Kutta method and got the flood hydrograph, water level change curve and surface line of spillway. The result showed that the proposed method is easy to program design and meet the precision requirement of engineering, and can be used in the calculation of hydrological differential equation.

Key words: flood control operation of reservoir; water surface calculation; hydrological and hydraulic calculation; changing-step Rung - Kutta method

水文水力计算中需要对许多微分方程(如水库水量平衡方程、明渠恒定非均匀渐变流的微分方程等)进行求解。传统的计算方法大多是以试算法、图解法等方法进行求解,此类方法具有工作量大、效率低、编程灵活性弱、调算精度低等缺陷。姜树海等^[1]通过引入随机数学模型,提出运用随机微分方程进行水库的调洪演算;陈元芳^[2]采用 Monta - Carlo 方法对随机模拟法及传统方法推求设计防洪库容优劣进行对比研究,结果表明其计算结果比传统的同频率法和同倍比法精度要高;李传奇等^[3]采用 LHS - MC 方法计算得到最高调洪水位随机分布,以此衡量漫坝风险;陈守煜^[4]将龙格库塔方法用于水库调洪计算,并从数学理论上分析了调洪数

值计算解的存在性、唯一性与适定性;胡岚平等^[5]、霍倩等^[6]分别将龙格库塔方法用于水面线计算。

本文在前人工作的基础上,基于 C++ 语言开发了基于变步长四阶龙格库塔方法的计算程序,并将其用于水库调洪演算与水面线的求解。以小水库除险加固工程为例,本文对比采用传统试算方法和变步长龙格库塔方法进行调洪演算和水库溢洪道水面线计算。

1 微分方程及其数值解析解法

1.1 水库水量平衡方程

水利工程中,常修建水闸或溢流坝等建筑物方便泄洪,以控制河流或水库的水位及流量,此时的水

流状态分为闸孔出流或者堰流^[7]。

(1) 闸孔出流的计算公式

$$q = \mu b e \sqrt{2GH_0}$$

式中： μ 为闸孔自由出流的流量系数； b 为泄流孔口宽； e 为闸门开启高度； H_0 为包括行近流速水头的闸前水深。

(2) 堰流的计算公式

$$q = mb \sqrt{2gH_0^3}$$

式中： m 为自由溢流的流量系数； b 为孔净宽； H_0 为包括行近流速水头的堰前水深。

数值解析法用数值方法对水库水量平衡微分方程^[8]进行求解。

$$\frac{dV}{dt} = Q(t) - q(V), \quad V(t_0) = V_0$$

式中： V_0 为起调库容； $V(t)$ 为水库水位对应的库容； $Q(t)$ 为入库流量； $q(V)$ 为库水位对应的出库流量。

根据安徽省 84 办法或者已知洪水过程线、泄流曲线以及水位 - 库容关系曲线,就可以求解水库各时段的泄流过程线,根据泄水过程线,通过样条曲线插值计算,可以得到库水位的变化过程线。常用的求解偏微分方程的方法很多,四阶龙格库塔方法是精度较高的一种。

1.2 明渠恒定非均匀渐变流的微分方程

棱柱体明渠求解水面线的理论依据是明渠恒定渐变流水面线微分方程^[9]：

$$\frac{dh}{ds} = \frac{i - \frac{Q^2}{(AC\sqrt{R})^2}}{1 - \frac{\alpha Q^2 B}{gA^3}}$$

式中： i 为渠道底坡； Q 为渠道流量； C 为谢才系数； A 、 R 、 B 分别为渠道断面的面积、水力半径、过水断面水面宽度； α 为动能修正系数。

1.3 变步长龙格库塔简述

(1) 显式 Runge - Kutta 方法

$$\begin{cases} V_n = V_{n-1} + \frac{\Delta t}{6}(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4) \\ K_1 = f(t_{n-1}, V_{n-1}) \\ K_2 = f(t_{n-1} + \frac{\Delta t}{2}, V_{n-1} + \frac{\Delta t}{2}K_1) \\ K_3 = f(t_{n-1} + \frac{\Delta t}{2}, V_{n-1} + \frac{\Delta t}{2}K_2) \\ K_4 = f(t_{n-1} + \Delta t, V_{n-1} + \Delta tK_3) \end{cases}$$

(2) 变步长龙格库塔方法

固定步长的龙格库塔在步长比较大时,容易错过峰值;步长比较小时,又增大了计算量。通过加倍或折半处理步长的方法称为变步长方法。为了选择步长,该方法对初始步长 Δt_0 进行修正,通过变步长方法,实现快速获取满足精度的下一时间步的函数值。虽然每一步的计算量增加了,但总体的计算量却没有显著增加^[10]。

Δ 为检查步长折半前后两次计算结果的偏差：

$$\Delta = |y_{n+1}^{(h/2)} - y_{n+1}^{(h)}|$$

(1) 假设精度 ε ,如果 $\Delta > \varepsilon$,反复将步长折半进行计算,直至 $\Delta < \varepsilon$ 为止,这时取最终得到的 $y_{n+1}^{(h/2)}$ 作为结果。

(2) 相反当 $\Delta < \varepsilon$,反复将步长加倍,直到 $\Delta > \varepsilon$ 为止,这时再将步长折半一次,就得到所要的结果。

2 程序设计

水库调洪演算程序在设计中可以用安徽省 84 办法计算中小型水库洪水过程线。计算中首先由安徽省 84 办法计算洪水过程线,并将结果写入 Excel。当调洪时,由 Excel 读入洪水过程线、库容曲线、泄流曲线等,由变步长龙格库塔方法进行调洪,最后将结果写入 Excel,在 Excel 中完成后处理。程序流程图见图 1。

计算水面线程序读入溢洪道参数后,使用变步长龙格库塔方法计算水面线,最后将结果写入 Excel,在 Excel 中完成后处理。程序流程图见图 2。

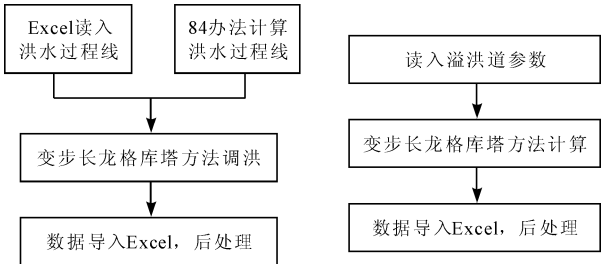


图 1 调洪演算程序流程图 图 2 水面线计算程序流程图

3 实例计算

3.1 安徽某水库调洪演算

(1) 主要参数。以安徽省东部某小一型水库为例,水库集水面积 2.83 km^2 ,总库容 138.5 万 m^3 。溢洪道为宽顶堰,宽 4 m 。根据规范,按 30 年一遇洪水设计,300 年一遇洪水校核。水库水位库容关系见表 1,由 84 办法计算水库 30 年一遇洪水过程线见表 2。

(2)程序计算结果分析。用本程序和传统试算方法进行计算,结果见表 3,通过对比可以看出,本程序与传统程序可以精确到毫米单位,满足工程需要精度。

表 1 水库水位库容关系

水位/m	51	52	53	54	55	55	56	57	57	58	58	59	59	60	60	61	61
库容/万 m ³	14	34	54	81	96	117	164	189	219	251	285	324	368	417	465	515	570

表 2 水库 30 年一遇洪水过程线

时间/h	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
入库流量/ (m ³ ·s ⁻¹)	0	0.918	1.890	2.268	2.700	3.078	3.240	4.158	5.184	5.562	13.500	47.816	21.222	5.292
时间/h	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27
入库流量/ (m ³ ·s ⁻¹)	3.402	3.726	3.402	2.916	2.700	2.430	2.106	1.998	1.998	1.944	1.944	1.188	0.324	0.054

表 3 调洪计算结果对比表

变步长龙格库塔方法				传统试算方法			
时段/h	入库流量/ (m ³ ·s ⁻¹)	出库流量/ (m ³ ·s ⁻¹)	水位/m	时间/h	入库流量/ (m ³ ·s ⁻¹)	出库流量/ (m ³ ·s ⁻¹)	水位/m
0.000	0.000	0.000	54.030	0	0.000	0.000	54.030
2.000	1.890	0.019	54.051	1	0.918	0.023	54.035
4.000	2.700	0.136	54.107	2	1.890	0.094	54.052
6.000	3.240	0.364	54.178	3	2.268	0.195	54.075
8.000	5.184	0.747	54.269	4	2.700	0.312	54.101
9.000	5.562	1.017	54.324	5	3.078	0.444	54.132
10.000	13.500	1.388	54.392	6	3.240	0.583	54.163
10.250	22.079	1.666	54.439	7	4.158	0.742	54.200
10.500	30.658	2.125	54.511	8	5.184	0.943	54.246
10.750	39.237	2.744	54.600	9	5.562	1.169	54.298
10.875	43.527	3.101	54.648	10	13.500	1.597	54.395
11.000	47.816	3.477	54.698	11	47.816	3.399	54.667
11.125	44.4918	3.854	54.745	12	21.222	5.480	54.924
11.250	41.1675	4.214	54.789	13	5.292	6.000	54.989
11.375	37.843	4.549	54.829	14	3.402	5.890	54.975
11.500	34.519	4.851	54.863	15	3.726	5.734	54.956
11.625	31.195	5.115	54.893	16	3.402	5.589	54.938
11.750	27.871	5.340	54.919	17	2.916	5.427	54.918
11.875	24.546	5.523	54.939	18	2.700	5.251	54.896
12.000	21.222	5.667	54.955	19	2.430	5.072	54.874
12.125	19.231	5.777	54.966	20	2.106	4.884	54.851
12.250	17.240	5.861	54.975	21	1.998	4.695	54.827
12.375	15.248	5.943	54.984	22	1.998	4.515	54.805
14.000	3.402	5.859	54.975	23	1.944	4.344	54.784
15.500	3.564	5.649	54.953	24	1.944	4.184	54.764
17.000	2.916	5.420	54.927	25	1.188	4.009	54.742
18.500	2.565	5.159	54.898	26	0.324	3.791	54.715
20.000	2.106	4.883	54.867	27	0.054	3.550	54.685
21.500	1.998	4.598	54.834				
23.000	1.944	4.335	54.803				
24.500	1.566	4.091	54.774				
26.000	0.324	3.770	54.735				
27.500	0.027	3.393	54.687				

用本文程序计算入库洪水过程线、下泄洪水过程线、水位曲线结果见图 3。从图 3 可以看出,当入库流量变幅较大时,步长减小,相应的出库流量和水位变幅增大。该水库 30 年一遇的高水位为 54.984 m,对应的下泄流量为 5.943 m³/s,对应库容为 116.37 万 m³,发生在第 12.375 时段。

3.2 某水库溢洪道水面线计算

- (1)主要参数。已知一水库溢洪道,长度 56 m。临界水深 $h = 1.568$ m,底宽 $b = 5$ m,边坡 $m = 0$,糙率 $n = 0.015$,通过流量 $Q = 30$ m³/s,渠道底坡 $i = 0.25$ 。
- (2)程序计算结果分析。用本程序和传统试算

方法进行计算,结果见表 4,通过对比可以看出,本程序与传统程序可以精确到毫米单位,满足工程需要精度。

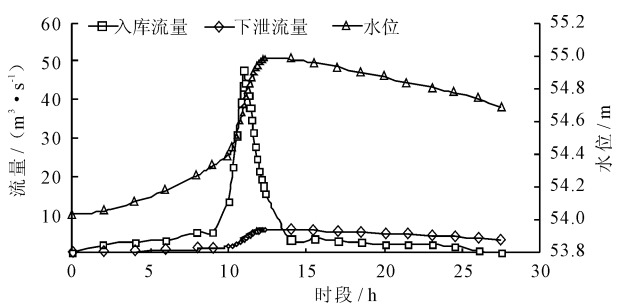


图3 调洪计算结果图

表4 水面线计算结果对比表

龙格库塔方法										试算法	
距离	水深	距离	水深	距离	水深	距离	水深	距离	水深	距离	水深
0.000	1.568	0.024	1.488	1.337	1.109	16.285	0.603	38.685	0.465	0.000	1.580
0.000	1.531	0.036	1.472	1.716	1.064	17.685	0.587	40.085	0.461	8.000	0.748
0.000	1.535	0.048	1.459	2.095	1.026	19.085	0.574	41.485	0.457	16.000	0.607
0.001	1.540	0.061	1.447	2.474	0.993	20.485	0.561	42.885	0.453	24.000	0.535
0.001	1.538	0.073	1.437	2.853	0.964	21.885	0.550	44.285	0.449	32.000	0.491
0.001	1.537	0.110	1.410	3.576	0.918	23.285	0.539	45.685	0.446	40.000	0.462
0.001	1.536	0.146	1.388	4.300	0.879	24.685	0.530	47.085	0.443	48.000	0.441
0.001	1.536	0.183	1.369	5.024	0.846	26.085	0.521	48.485	0.440	56.000	0.426
0.001	1.535	0.219	1.353	5.748	0.817	27.485	0.513	49.885	0.437		
0.002	1.532	0.301	1.320	6.982	0.775	28.885	0.505	51.414	0.434		
0.003	1.529	0.382	1.293	8.217	0.741	30.285	0.498	52.943	0.431		
0.004	1.526	0.464	1.269	9.451	0.711	31.685	0.492	54.471	0.428		
0.005	1.523	0.545	1.248	10.685	0.686	33.085	0.486	56.000	0.426		
0.010	1.512	0.743	1.204	12.085	0.661	34.485	0.480				
0.014	1.503	0.941	1.168	13.485	0.639	35.885	0.475				
0.019	1.495	1.139	1.136	14.885	0.620	37.285	0.470				

溢洪道水面线见图 4,随着距离的增加,水位降低并趋于稳定,并且由龙格库塔方法和传统试算法所得计算结果相似。

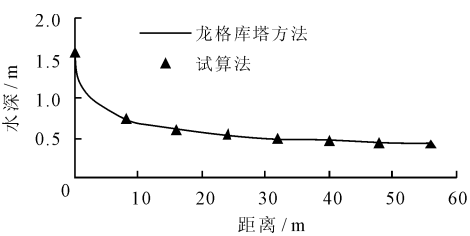


图4 溢洪道水面线图

4 结 语

水库的调洪目的是在保证防洪安全的前提下,为有效利用洪水资源创造条件。泄水建筑物的设计需对各种可能的方案进行技术经济比较,以保证安

全通过设计、校核或可能最大洪水。因此进行水库调洪计算及溢洪道水面线计算变得尤为重要。本文算例表明,对水库采用变步长龙格库塔方法进行调洪演算,可以解决试算法试算过程中错过峰值的问题,且本程序计算结果精度满足工程要求,对中小水库加固设计和运行有一定的指导和实际意义。

参考文献:

[1] 姜树海,范子武. 水库防洪预报调度的风险分析[J]. 水利学报, 2004, 35(11):102 - 107.

[2] 陈元芳. 随机模拟法与传统方法推求设计防洪库容优劣的初步研究[J]. 水科学进展, 2000, 11(1):64 - 69.

[3] 李传奇,王 帅,王 薇,等. LHS - MC 方法在漫坝风险分析中的应用[J]. 水力发电学报, 2012, 31(1):5 - 9.

29.7 m 时,长沙枢纽坝前最低水位为 29.5 m。若长沙枢纽坝前蓄水位进一步降低,为保证株洲枢纽下游引航道水位为 29.7 m,株洲枢纽必须加大下泄流量,经计算,当长沙枢纽坝前水位降低至 29.0 m 时,最低下泄流量至少为 $500 \text{ m}^3/\text{s}$ 。

5 枢纽库区淹没控制研究

湘潭水文站为湘江下游的控制性水文站,位于长沙与株洲之间,下距长沙枢纽约 69 km,上距株洲枢纽约 66 km。为研究长沙枢纽水库正常调度时对于上游淹没的影响,以湘潭水文站作为控制性淹没点,研究在不增加湘潭水文站河段淹没损失的情况下,不同枢纽蓄水位下对应的来流量。

在长沙枢纽正常蓄水位 29.7 m,流量为 $4\,000 \text{ m}^3/\text{s}$ 时,湘潭水文站水位 30.68 m。以不增加湘潭水文站河段淹没损失作为约束条件,经过多次试算,计算了长沙枢纽不同蓄水位情况下对应的最大来流量,见图 2。可以看出,随来流量增加,长沙枢纽坝前蓄水位需逐渐降低。当来流量为 $4\,950 \text{ m}^3/\text{s}$ 时,长沙枢纽坝前蓄水位应为 29.0 m;当来流量为 $5\,400 \text{ m}^3/\text{s}$ 时,长沙枢纽坝前蓄水位应为 28.5 m。

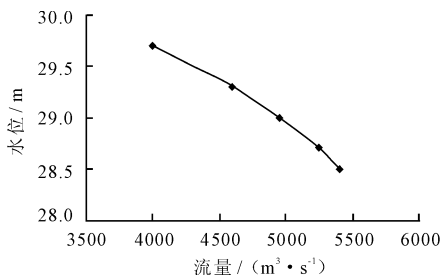


图 2 以湘潭水文站水位作为约束的长沙枢纽坝前水位流量关系曲线图

6 结 语

运用建立的株洲枢纽至长沙枢纽间长河段二维

水流数学模型,对库区水面线变化特征进行了研究,结果表明:

(1) 枢纽蓄水(蓄水位 29.7 m)后非敞泄的各级典型流量下,水面线在库区下游段比降平缓,上游段,比降逐渐增大,呈现翘尾现象;敞泄流量下,枢纽蓄水前后河段的比降变化不大。

(2) 经多次试算,当长沙枢纽坝前水位降低至 29.0 m,株洲枢纽下游引航道水位为 29.7 m 时,株洲枢纽最低下泄流量至少为 $500 \text{ m}^3/\text{s}$ 。

(3) 依据设计的长沙枢纽水库淹没方案,计算出水库淹没曲线控制线,推求了库区控制断面处(湘潭水文站)不增加水库淹没损失的坝前蓄水位与坝址流量关系,合理确定了长沙枢纽预泄的动态控制水位调度线,为水库优化调度提供边界约束条件。

参考文献:

- [1] 陈慈洲,黄洪,吴洋. 峡山水库淹没影响范围分析[J]. 江西水利科技, 2013, 39(4): 322-325.
- [2] 李宁新. 南方低水头径流式电站的水库浸没问题[J]. 人民珠江, 2008, 29(2): 30-33.
- [3] 卜继勤,罗纯军,曹志辉. 长泥坪水库运行方式及回水研究[J]. 小水电, 2006(6): 38-40.
- [4] 郭大军,王东辉. 桃源水电站水库运行方式及回水研究[J]. 水力发电, 2014, 40(6): 42-44.
- [5] 卜继勤,李玲,罗纯军. 低水头电站水库回水分析研究[J]. 广东水利水电, 2003(6): 22-23.
- [6] 谢海林,王丰赞. 岩滩水电站汛期动态控制水位调度运行线的设计[J]. 红水河, 2005, 24(1): 71-73.
- [7] 朱永英,袁晶瑄,王国利,等. 实时预蓄预泄法汛限水位动态控制与应用[J]. 辽宁工程技术大学学报(自然科学版), 2008, 27(4): 606-609.
- [8] 邱瑞田,王本德,周惠成. 水库汛期限制水位控制理论与观念的更新探讨[J]. 水科学进展, 2004, 15(1): 68-72.
- [9] 中华人民共和国交通部. TJT/T232-98 内河航道与港口水流泥沙模拟技术规程[S]. 北京:人民交通出版社, 1998.

(上接第 164 页)

- [4] 陈守煜. 水资源与防洪系统可变模糊集理论与方法[M]. 大连:大连理工大学出版社, 2005.
- [5] 胡岚平,刘华,覃文文,等. 基于 Matlab 的明渠恒定非均匀渐变流水面线的数值计算[J]. 西南民族大学学报(自然科学版), 2011, 37(5): 827-831.
- [6] 霍倩,李广品. 龙格-库塔法计算明渠恒定渐变流水面线[J]. 水文, 2011, 31(1): 22-25.
- [7] 吴持恭. 水力学(第 3 版)[M]. 北京:高等教育出版社, 2003.

- [8] 郭生练. 水库调度综合自动化系统[M]. 武汉:武汉水利电力大学出版社, 2000.
- [9] 李炜. 水力计算手册(第二版)[M]. 北京:中国水利水电出版社, 2006.
- [10] 李庆扬,王能超,易大义. 数值分析(第 5 版)[M]. 北京:清华大学出版社, 2008.